Álgebra Linear - 2019.1

Lista 1 - Sistemas lineares

1) Descreva todas as possíveis matrizes 2×2, que estão na forma escada reduzida por linha.

Solução

De acordo com a definição de uma matriz na forma escada reduzida por linhas as possibilidades são:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

2) Reduza as matrizes abaixo à forma escada reduzida por linha e calcule posto e nulidade de cada uma delas:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

Solução

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-3L_1\to L_3]{L_2-2L_1\to L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 7 & -7 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{7}L_3\to L_3]{\frac{1}{3}L_2\to L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3-L_2\to L_3]{L_1+2L_2\to L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{17}{21} \end{bmatrix} \xrightarrow{3L_3\to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1-\frac{1}{3}L_3\to L_1]{L_2+\frac{4}{3}L_3\to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{22}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{7} \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz A tem posto 3 e nulidade 1.

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

Solução

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1\to L_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3-2L_1\to L_3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-2L_2\to L_3]{L_1-\frac{1}{2}L_2\to L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz B tem posto 2 e nulidade 2.

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Solução

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4-2L_1\to L_4]{L_3-3L_1\to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}L_2\to L_2}\begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&-7&-7\\0&-5&-5\end{bmatrix}\xrightarrow[L_4+5L_2\to L_4]{\substack{L_1-L_2\to L_1\\L_3+7L_2\to L_3}}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz C tem posto 2 e nulidade 1.

3) Prove que toda matriz anti-simétrica 3×3 não-nula tem posto igual a dois.

Solução

Uma matriz A é antissimétrica se $A^T=-A$. Assim,

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix} \text{ e } A^T=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_{11}&-a_{12}&-a_{13}\\-a_{21}&-a_{22}&-a_{23}\\-a_{31}&-a_{32}&-a_{33}\end{bmatrix}=-A.$$

De $A^T=-A$, temos

$a_{11}=-a_{11}\Rightarrow a_{11}=0$, $a_{21}=-a_{12}$, $a_{31}=-a_{13}$, $a_{12}=-a_{21}$, $a_{22}=-a_{22}\Rightarrow a_{22}=0$, $a_{32}=-a_{23}$, $a_{13}=-a_{31}$, $a_{23}=-a_{32}$ e $a_{33}=-a_{33}\Rightarrow a_{33}=0$. Em vista disso,

$$A=\begin{bmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\-a_{12}&0&a_{23}\\-a_{13}&-a_{23}&0\end{bmatrix}.$$

Vamos encontrar a forma escalonada da matriz A. Assumimos inicialmente que $a_{12}\neq 0$, então

$$\begin{bmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\-a_{12}&0&a_{23}\\-a_{13}&-a_{23}&0\end{bmatrix}\xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2}\begin{bmatrix}-a_{12}&0&a_{23}\\0&a_{12}&a_{13}\\-a_{13}&-a_{23}&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{a_{12}}L_1\to L_1}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{a_{23}}{a_{12}}\\0&a_{12}&a_{13}\\-a_{13}&-a_{23}&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3+a_{13}L_1\to L_3}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{a_{23}}{a_{12}}\\0&a_{12}&a_{13}\\0&-a_{23}&-\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{a_{12}}L_2\to L_2}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{a_{23}}{a_{12}}\\0&1&\frac{a_{13}}{a_{12}}\\0&-a_{23}&-\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}\end{bmatrix}\xrightarrow{L_3+a_{23}L_2\to L_3}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{a_{23}}{a_{12}}\\0&1&\frac{a_{13}}{a_{12}}\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Portanto, para o caso em que $a_{12}\neq 0$, o posto da matriz A é 2 e nulidade é 1.

Agora consideremos o caso em que $a_{12}=0$ e $a_{13}\neq 0$. Assim,

$$\begin{bmatrix}0&0&a_{13}\\0&0&a_{23}\\-a_{13}&-a_{23}&0\end{bmatrix}\xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_3}\begin{bmatrix}-a_{13}&-a_{23}&0\\0&0&a_{23}\\0&0&a_{13}\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{a_{13}}L_1\to L_1}\begin{bmatrix}1&\frac{a_{23}}{a_{13}}&0\\0&0&a_{23}\\0&0&a_{13}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_3}\begin{bmatrix}1&\frac{a_{23}}{a_{13}}&0\\0&0&a_{13}\\0&0&a_{23}\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{a_{13}}L_2\leftrightarrow L_2}\begin{bmatrix}1&\frac{a_{23}}{a_{13}}&0\\0&0&1\\0&0&a_{23}\end{bmatrix}\xrightarrow{L_3-a_{23}L_2\leftrightarrow L_3}\begin{bmatrix}1&\frac{a_{23}}{a_{13}}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Portanto, para o caso em que $a_{12}=0$ e $a_{13}\neq 0$, a matriz A tem posto 2 e nulidade 1.

Consideremos agora o caso em que $a_{12}=0$, $a_{13}=0$ e $a_{23}\neq 0$. Logo,

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&a_{23}\\0&-a_{23}&0\end{bmatrix}\xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_3}\begin{bmatrix}0&-a_{23}&0\\0&0&a_{23}\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{a_{23}}L_2\to L_2]{-\frac{1}{a_{23}}L_1\to L_1}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Portanto, para o caso em que $a_{12}=0$ e $a_{13}=0$ a matriz A tem posto 2 e nulidade é 1.

Por conseguinte, devido ao casos analisados, a matriz antissimétrica 3×3 não nula tem posto 2 e nulidade 1.

4) Resolver os sistemas por escalonamento. Para sistemas com solução indeterminada, obter a resposta em forma paramétrica.

(a) $\begin{cases} x+5y=13 \\ 4x+3y=1 \end{cases}$

Solução

Vamos transformar a matriz ampliada do sistema em uma matriz na forma escalonada.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 13 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2-4L_1\to L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 13 \\ 0 & -17 & -51 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{17}L_2\to L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1-5L_2\to L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Portanto, a solução do sistema é $x=-2$ e $y=3$.

Posto da Matriz dos Coeficientes = Posto da Matriz Ampliada = 2 = Número de incógnitas. Portanto, temos solução única.

(b) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 5x-3y+z=-10 \\ -2x-y+z=1 \end{cases}$

Solução

Vamos transformar a matriz ampliada do sistema em uma matriz na forma escalonada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & -10 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3+2L_1\to L_3]{L_2-5L_1\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -13 & 16 & -10 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{13}L_2\to L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{13} & \frac{10}{13} \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-3L_2\to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{13} & \frac{10}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{17}{13} & -\frac{17}{13} \end{array}\right] (*).$$

Logo, da linha 1 de $(*)$, $-\frac{17}{13}z=-\frac{17}{13} \Rightarrow z=1$. Da linha 2 de $(*)$, $y-\frac{16}{13}.1=\frac{10}{13} \Rightarrow y=2$. Da linha 1 $(*)$, $x+2y-3z=0 \Rightarrow x+2.2-3.1=0 \Rightarrow x=-1$.

Portanto, $x=-1$, $y=2$ e $z=1$.

Posto da Matriz dos Coeficientes = Posto da Matriz Ampliada = 3 = Número de incógnitas. Portanto, temos solução única.

(c) $\begin{cases} x+y+2z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x+3y-z=3 \end{cases}$

Solução

Vamos transformar a matriz ampliada do sistema em uma matriz na forma escalonada. Assim,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-L_1\to L_3]{L_2-2L_1\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}L_2\to L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-2L_2\to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \end{array}\right] (I).$$

Da linha 3 de (I), temos que $-5z = -9 \Rightarrow z = \frac{9}{5}$. Da linha 2 de (I), $y + z = 3 \Leftrightarrow y = 3 - z \Rightarrow y = 3 - \frac{9}{5} = \frac{6}{5}$. Da linha 1 de (I), $x + y + 2z = 6 \Leftrightarrow x = -y - 2z + 6 \Rightarrow x = -\frac{6}{5} - 2.\frac{9}{5} + 6 = \frac{6}{5}$.
Portanto, $x = \frac{6}{5}$, $y = \frac{6}{5}$ e $z = \frac{9}{5}$.
Posto da Matriz dos Coeficientes = Posto da Matriz Ampliada = 3 = Número de incógnitas. Portanto, temos solução única.

(d) $\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$

<u>Solução</u>
Transformando a matriz ampliada do sistema em uma matriz na forma escalonada.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-L_1\to L_3]{L_2-3L_1\to L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right].$$

Posto da Matriz dos Coeficientes = Posto da Matriz Ampliada = $3 < 4$ = Número de incógnitas. Portanto, temos um sistema compatível Indeterminado.
O sistema equivalente é:

$$\begin{cases} x & -y & +2z & -t & = 0 \\ & 4y & -3z & +4t & = 0 \\ & & -3z & -4t & = 0 \end{cases}.$$

A Nulidade = Número de incógnitas - Posto da Matriz dos coeficientes = 4 - 3 = 1. Temos então uma variável livre que escolhemos $t \in \mathbb{R}$.
Da última equação $z = -\frac{4}{3}t$, substituindo na segunda equação obtemos $y = -2t$. Da primeira equação $x - y + 2z - t = 0 \Leftrightarrow x + 2t + 2(-\frac{4}{3}t) - t = 0 \Leftrightarrow x - \frac{5}{3}t = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}t$.
Portanto, $x = \frac{5}{3}t$, $y = -2t$ e $z = -\frac{4}{3}t$, $t \in \mathbb{R}$.

Resposta: $(x, y, z, t) = t(\frac{5}{3}, -2, -\frac{4}{3}, 1)$. Dimensão 1.

(e) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$

<u>Solução</u>
Vamos transformar a matriz ampliada do sistema na forma escalonada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & -7 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-L_1\to L_3]{L_2-2L_1\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 6 & -8 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-2L_2\to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right].$$

Portanto, pela última linha concluímos que o sistema é impossível.
Posto da Matriz dos Coeficientes $= 2 < 3 =$ Posto da Matriz Ampliada.

(f) $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

Solução
Vamos transformar a matriz ampliada do sistema na forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & -1 & -3 & \vdots & -3 \\ 3 & 3 & -5 & \vdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & 2 & -4 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & -3 & \vdots & -3 \\ 3 & 3 & -5 & \vdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_4 - 3L_1 \to L_4 \\ L_5 + L_1 \to L_5}]{\substack{L_2 - 3L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & -7 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -6 \\ 0 & 6 & -8 & \vdots & -9 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 - \frac{6}{5}L_2 \to L_4]{L_4 + \frac{1}{10}L_3 \to L_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & -7 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -6 \\ 0 & 6 & -8 & \vdots & -9 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_5 + \frac{1}{2}L_3 \to L_5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & -7 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftrightarrow L_5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & -7 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, pela linha 4 da matriz ampliada escalonada, concluímos que o sistema é impossível.
Posto da Matriz dos Coeficientes $= 3 < 4 =$ Posto da Matriz Ampliada.

(g) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$

Solução
A matriz ampliada do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 0 \\ 2 & 5 & 6 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos encontrar a sua forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 0 \\ 2 & 5 & 6 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - 2L_1 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 9 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Da última linha obtemos que $y = 0$. Da primeira temos que $x - 2y + 3z = 0 \Leftrightarrow x + 2z = 0 \Rightarrow x = -3z$.
Portanto, $y = 0$ e $x = -3z$, $z \in \mathbb{R}$.
Posto da Matriz dos Coeficientes $=$ Posto da Matriz Ampliada $= 2 < 3 =$ Número de Incógnitas. Portanto o sistema é compatível e indeterminado.
Nulidade = 3 - 2 = 1. Temos uma varável livre, que escolhemos $z \in \mathbb{R}$.
Resposta: $(x, y, z) = z(-3, 0, 1)$. Dimensão 1.

5) Determine m de modo que o sistema linear seja indeterminado:

$$\begin{cases} mx + 3y = 12 \\ 2x + \dfrac{1}{2}y = 2 \end{cases}$$

Solução

A matriz ampliada do sistema é:

$$\begin{bmatrix} m & 3 & \vdots & 12 \\ 2 & \frac{1}{2} & \vdots & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculemos a sua forma escalonada

$$\begin{bmatrix} m & 3 & \vdots & 12 \\ 2 & \frac{1}{2} & \vdots & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \vdots & 2 \\ m & 3 & \vdots & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - \frac{1}{2}mL_1 \to L_2} \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \vdots & 2 \\ 0 & 3 - \frac{m}{4} & \vdots & 12 - m \end{bmatrix}.$$

Portanto, concluí-se pela última linha que para o sistema ser indeterminado devemos ter $m = 12$.

6) Para o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} m^2x - y = 0 \\ x + ky = 0 \end{cases}$$

Determine, se existe, o valor de m em função de k de modo que o sistema:

(a) tenha solução única (trivial);

Solução

A matriz ampliada do sistema é:

$$\begin{bmatrix} m^2 & -1 & \vdots & 0 \\ 1 & k & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculemos a forma escalonada da matriz ampliada do sistema

$$\begin{bmatrix} m^2 & -1 & \vdots & 0 \\ 1 & k & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & k & \vdots & 0 \\ m^2 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - m^2L_1 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & k & \vdots & 0 \\ 0 & -1 - m^2k & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, concluí-se pela última linha que para o sistema ter solução única devemos ter $-1 - m^2k \neq 0$. Note que se $k > 0$, $-1 - m^2k \neq 0$. No entanto se $k < 0$,$-1 - m^2k \neq 0$ se e, somente se, $m \neq \pm\sqrt{-\frac{1}{k}}$.

(b) seja impossível.

Solução

Pelo item (a) concluímos que não há valor de m para o qual o sistema seja impossível. Visto que, para $m = \pm\sqrt{-\frac{1}{k}}$, $k < 0$, o sistema é possível e indeterminado e nos demais casos o sistema é possível e determinado.

Observação: o sistema é homogêneo então sempre tem solução trivial $x = y = 0$, portanto nunca é impossível.

7) Prove que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 3t = a \\ 2x - 5y - 3z + 12t = b \\ 7x + y + 8z + 5t = c \end{cases}$$

admite solulção se, e somente se, $37a + 13b = 9c$. Ache a solução geral do sistema quando $a = 2$ e $b = 4$.

Solução

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & -3 & a \\ 2 & -5 & -3 & 12 & b \\ 7 & 1 & 8 & 5 & c \end{array}\right].$$

Calculemos a sua forma escalonada

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & -3 & a \\ 2 & -5 & -3 & 12 & b \\ 7 & 1 & 8 & 5 & c \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-7L_1\to L_2]{L_2-2L_1\to L_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & -3 & a \\ 0 & -9 & -9 & 18 & b-2a \\ 0 & -13 & -13 & 26 & c-7a \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{9}L_2\to L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & -3 & a \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \frac{2a-b}{9} \\ 0 & -13 & -13 & 26 & c-7a \end{array}\right] \xrightarrow{L_3+13L_2\to L_3} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & -3 & a \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \frac{2a-b}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9c-37a-13b}{9} \end{array}\right].$$

Portanto, concluí-se pela última linha que o sistema admite solução se e, somente se, $\frac{9c-37a-13b}{9} = 0 \Leftrightarrow 37a + 13b = 9c$.

Agora vamos calcular a solução geral do sistema quando $a = 2$ e $b = 4$. Logo, para $a = 2$ e $b = 4$ a matriz ampliada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Calculemos a sua forma escada reduzida por linhas

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1-2L_2\to L_1} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Portanto, da segunda linha obtemos que $y = -z + 2t$ e da primeira linha obtemos que $x = 2 - z - t$, com $z, t \in \mathbb{R}$.

Posto da Matriz dos Coeficientes = Posto da Matriz Ampliada = 2 < 4 = Número de Incógnitas. Sistema Compatível Indeterminado.

Nulidade = 4 - 2 = 2. Temos duas variáveis livres que escolhemos $z, t \in \mathbb{R}$.

Resposta: $(x, y, z, t) = z(-1, -1, 1, 0) + t(-1, 2, 0, 1) + (2, 0, 0, 0)$.

$v_0 = (2, 0, 0, 0)$ é chamada solução particular.

8) Determinar a e b para que o sistema seja possível e determinado

$$\begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$$

Solução

$$\left[\begin{array}{cc:c} 3 & -7 & a \\ 1 & 1 & b \\ 5 & 3 & 5a+2b \\ 1 & 2 & a+b-1 \end{array}\right].$$

Vamos calcular a forma escalonada da matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & \vdots & a \\ 1 & 1 & \vdots & b \\ 5 & 3 & \vdots & 5a+2b \\ 1 & 2 & \vdots & a+b-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & b \\ 3 & -7 & \vdots & a \\ 5 & 3 & \vdots & 5a+2b \\ 1 & 2 & \vdots & a+b-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4-L_1\to L_4]{\substack{L_2-3L_1\to L_2 \\ L_3-5L_1\to L_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & b \\ 0 & -10 & \vdots & a-3b \\ 0 & -2 & \vdots & 5a-3b \\ 0 & 1 & \vdots & a-1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & b \\ 0 & 1 & \vdots & a-1 \\ 0 & -2 & \vdots & 5a-3b \\ 0 & -10 & \vdots & a-3b \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4+10L_2\to L_4]{L_3+2L_2\to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & b \\ 0 & 1 & \vdots & a-1 \\ 0 & 0 & \vdots & 7a-3b-2 \\ 0 & 0 & \vdots & 11a-3b-10 \end{bmatrix}.$$

Para o sistema ser determinado é necessário que

$$\begin{cases} 7a-3b=2 \\ 11a-3b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7a+3b=-2 \\ 11a-3b=10 \end{cases} \Leftrightarrow 4a=8 \Rightarrow a=2.$$

Substituindo $a=2$ em $7a-3b=2$, obtemos $b=4$.

Portanto, para o sistema ser determinado é necessário que $b=4$ e $a=2$.

9) Determinar o valor de k para que o sistema

$$\begin{cases} x+2y+kz=1 \\ 2x+ky+8z=3 \end{cases}$$

tenha:

(a) solulção única

(b) nenhuma solução

(c) mais de uma solução

Solução

A matriz ampliada do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & k & \vdots & 1 \\ 2 & k & 8 & \vdots & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculemos a forma escalonada da matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & k & \vdots & 1 \\ 2 & k & 8 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2-2L_1\to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & k & \vdots & 1 \\ 0 & k-4 & 8-2k & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) O posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes, mas não é igual ao número de incógnitas. Em vista disso, o sistema não admite solução única.

(b) O sistema não admite nenhuma solução se $k-4=0$ e $8-2k=0$, o que ocorre em $k=4$.

(c) O sistema admite mais de uma solução para todo $k \neq 4$.

10) Resolva o sistema

$$\begin{cases} \frac{2}{u}+\frac{3}{v}=8 \\ \frac{1}{u}-\frac{1}{v}=-1 \end{cases}$$

Solução

Fazendo as mudanças de variáveis $x = \frac{1}{u}$ e $y = \frac{1}{v}$, temos

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases}.$$

Daí segue que $5y = 10 \Rightarrow y = 2$. Substituindo $y = 2$ em $x - y = -1$, obtemos que $x = 1$.
Portanto, $\frac{1}{u} = x = 1 \Rightarrow u = 1$ e $\frac{1}{v} = y = 2 \Rightarrow v = \frac{1}{2}$.

11) Discuta os seguintes sistemas:

(a) $\begin{cases} x + z = 4 \\ y + z = 5 \\ ax + z = 4 \end{cases}$

<u>**Solução**</u>
A matriz ampliada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ a & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Calculemos a forma escalonada da matriz ampliada do sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ a & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - aL_1 \to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1-a & 4-4a \end{array}\right].$$

Pela última linha temos que se $a = 1$ o sistema é indeterminado. Por outro lado, se $a \neq 1$ o sistema é determinado.

(b) $\begin{cases} x + z + w = 0 \\ x + ky + k^2 w = 1 \\ x + (k+1)z + w = 1 \\ x + z + kw = 2 \end{cases}$

<u>**Solução**</u>
A matriz ampliada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 & k^2 & 1 \\ 1 & 0 & k+1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & k & 2 \end{array}\right].$$

Calculemos a sua forma escalonada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 & k^2 & 1 \\ 1 & 0 & k+1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & k & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 - L_1 \to L_4]{\substack{L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & -1 & k^2-1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & 2 \end{array}\right].$$

Pela quarta linha, temos que se $k = 1$ o sistema é impossível. Também, pela terceira linha, temos que se $k = 0$ o sistema é impossível. Nestes casos o Posto da Matriz dos Coeficientes $= 3 < 4 =$ Posto da Matriz Ampliada.
Por outro lado, se $k \neq 1$ e $k \neq 0$ o sistema é possível e determinado e tem como solução: $x = \frac{-3k+1}{k^2-k}$, $y = \frac{-2k^2-k+1}{k^2}$, $z = \frac{1}{k}$ e $w = \frac{2}{k-1}$.

12) Determine k para que o sistema admita solução.

$$\begin{cases} -4x+3y=2 \\ 5x-4y=0 \\ 2x-y=k \end{cases}$$

Solução

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{cc:c} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{array}\right].$$

Calculemos a forma escalonada da matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cc:c} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{4}L_1 \leftrightarrow L_1} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-2L_1 \to L_3]{L_2-5L_1 \to L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & k+1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3+2L_2 \to L_3} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & k+6 \end{array}\right].$$

Portanto, pela última linha, temos que se $k = -6$ o sistema é possível e determinado. Neste caso temos: Posto da Matriz dos Coeficientes $= 2 =$ Posto da Matriz Ampliada.

Por outro lado, se $k \neq -6$ o sistema é impossível. Neste caso temos: Posto da Matriz dos Coeficientes $= 2 < 3 =$ Posto da Matriz Ampliada.

13) Classifique, de acordo com o valor de k, os sistemas abaixo em "possível e determinado", "possível e indeterminado", ou 'impossível".

a) $\begin{cases} x+y-kz &= 0 \\ kx+y-z &= 2-k \\ x+ky-z &= -k \end{cases}$;

b) $\begin{cases} kx+2y &= 6 \\ 3x-y &= -2 \\ x+y &= 0 \end{cases}$.

Solução

14) a) SI se $k = -2$ ou $k = 1$ e SPD caso contrário. b) SPD se $k = -10$ e SI caso contrário.