# Álgebra Linear - 2019.1

## Lista 2 - Espaços e subespaços Vetoriais

1) Para os conjuntos seguintes, determine se são espaços vetoriais reais, se a adição e multiplicação são as usuais.

**Solução**

Os exercícios podem ser resolvidos analisando se os conjuntos são fechados para a adição e multiplicação, já que são subconjuntos de um espaço vetorial maior. Não necessário provar os 8 axiomas de espaço vetorial, pois eles são satifeitos no conjunto maior. No caso dos polinômios de grau menor ou igual a $n$ os axiomas são provados de maneira ilustrativa.

(a) O conjunto dos polinômios de grau menor o igual a $n$ (considerando o polinômio nulo, que não tem grau, pertencente a este conjunto).

**Solução**

Seja $P_n(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios sobre $\mathbb{R}$ em uma variavel $t$, ou seja, o conjunto das expressões da forma

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t + ... + a_n t^n = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$$

Sejam $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t + ... + a_n t^n = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t + ... + b_n t^n = \sum_{j=0}^{n} b_j t^j$ dois polinômios quaisquer em $P_n(\mathbb{R})$. A soma é definida por

$$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + ... + (a_n + b_n)t^n = \sum_{j=0}^{n} (a_j + b_j)t^j.$$

A multiplicação por um escalar $\alpha$ é definida por

$$\alpha p(t) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)t + (\alpha a_2)t^2 + ... + (\alpha a_n)t^n = \sum_{j=0}^{n} (\alpha a_j)t^j.$$

Vamos mostrar que o conjunto $P_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Sejam $p(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$, $q(t) = \sum_{j=0}^{n} b_j t^j$, $r(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j$ e $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$.

i. $p(t) + q(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j + \sum_{j=0}^{n} b_j t^j = \sum_{j=0}^{n} (a_j + b_j)t^j = \sum_{j=0}^{n} (b_j + a_j)t^j = q(t) + p(t).$

ii. $p(t) + (q(t) + r(t)) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j + \left( \sum_{j=0}^{n} b_j t^j + \sum_{j=0}^{n} c_j t^j \right) = \sum_{j=0}^{n} [a_j + (b_j + c_j)] t^j =$

$= \sum_{j=0}^{n} [(a_j + b_j) + c_j] t^j = \left( \sum_{j=0}^{n} a_j t^j + \sum_{j=0}^{n} b_j t^j \right) + \sum_{j=0}^{n} c_j t^j = (p(t) + q(t)) + r(t).$

iii. Seja $\overline{0}(t)$ o polinômio nulo de $P_n(\mathbb{R})$, então

$p(t) + \overline{0}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j + \sum_{j=0}^{n} 0 t^j = \sum_{j=0}^{n} (a_j + 0)t^j = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j = p(t).$

iv. Defina o polinômio $(-p)(t) = \sum_{j=0}^{n} (-a_j)t^j$, então

$p(t) + (-p(t)) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j + \sum_{j=0}^{n} (-a_j)t^j = \sum_{j=0}^{n} (a_j + (-a_j))t^j = \sum_{j=0}^{n} 0t^j = \overline{0}(t).$

v. $\alpha(\beta p(t)) = \alpha\left(\sum_{j=0}^{n} \beta a_j t^j\right) = \sum_{j=0}^{n} \left(\alpha\beta a_j t^j\right) = \sum_{j=0}^{n}(\alpha\beta)a_j t^j = (\alpha\beta)p(t).$

vi. $\alpha(p(t) + q(t)) = \alpha\sum_{j=0}^{n}(a_j + b_j)t^j = \sum_{j=0}^{n}[\alpha(a_j + b_j)]t^j = \sum_{j=0}^{n}(\alpha a_j + \alpha b_j)t^j = \sum_{j=0}^{n}(\alpha a_j)t^j + \sum_{j=0}^{n}(\alpha b_j)t^j = \alpha p(t) + \alpha q(t).$

vii. $(\alpha+\beta)p(t) = (\alpha+\beta)\sum_{j=0}^{n} a_j t^j = \sum_{j=0}^{n}(\alpha+\beta)a_j t^j = \sum_{j=0}^{n}(\alpha a_j+\beta a_j)t^j = \sum_{j=0}^{n}(\alpha a_j)t^j + \sum_{j=0}^{n}(\beta a_j)t^j = \alpha p(t)+\beta p(t).$

viii. $1p(t) = \sum_{j=0}^{n}(1a_j)t^j = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j = p(t).$

(b) O conjunto de todas as funções reais tais que $f(0) = f(1)$.

**Solução**

O conjunto $V$ das funções reais tais que $f(0) = f(1)$ é fechado em relação a adição e a multiplicação por escalar.
De fato, sejam $f,\ g \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = f(1) + g(1) = (f + g)(1).$
ii. $(\alpha f)(0) = \alpha f(0) = \alpha f(1) = (\alpha f)(1).$

Os 8 axiomas de espaço vetorial são satisfeitos, pois $V$ é um subconjunto das funções reais.

(c) O conjunto das funções tais que $f(0) = 1 + f(1)$.

**Solução**

O conjunto $V$ das funções reais tais que $f(0) = 1 + f(1)$ não é fechado nem relação a adição nem em relação a multiplicação por escalar.
De fato, sejam $f,\ g \in V$ e $\alpha \neq 1$ em $\mathbb{R}$, então

i. $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 1 + f(1) + 1 + g(1) = 2 + (f + g)(1) \neq 1 + (f + g)(1).$
ii. $(\alpha f)(0) = \alpha f(0) = \alpha(1 + f(1)) = \alpha + \alpha f(1) \neq 1 + \alpha f(1) = 1 + (\alpha f)(1).$

(d) O conjunto das funções reais crescentes.

**Solução**

O conjunto $V$ das funções reias crescentes não é fechado em relação a multiplicação por escalar.
De fato, considere em $V$ a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t$. Agora tome o escalar $-1$ e, assim, $(-1)f(t) = -t$ que é decrescente.

(e) O conjunto das funções reais pares.

**Solução**

O conjunto $V$ das funções reais pares tais que $f(-t) = f(t)$ é fechado em relação a adição e a multiplicação por escalar.
De fato, sejam $f,\ g \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $(f + g)(-t) = f(-t) + g(-t) = f(t) + g(t) = (f + g)(t) \Longrightarrow f + g \in V.$
ii. $(\alpha f)(-t) = \alpha f(-t) = \alpha f(t) = (\alpha f)(t) \Longrightarrow \alpha f \in V.$

Os 8 axiomas de espaço vetorial são satisfeitos, pois $V$ é um subconjunto das funções reais.

(f) O conjunto das funções contínuas em $[0, 1]$ tais que $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

**Solução**

O conjunto $V$ das funções contínuas em $[0, 1]$ tais que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$ é fechado em relação a adição e a multiplicação por escalar.
De fato, sejam $f,\ g \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $\displaystyle\int_0^1 (f + g)(x)dx = \int_0^1 [f(x) + g(x)]dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow f + g \in V.$
ii. $\displaystyle\int_0^1 (\alpha f)(x)dx = \int_0^1 \alpha f(x)dx = \alpha\int_0^1 f(x)dx = \alpha 0 = 0 \Longrightarrow \alpha f \in V.$

Os 8 axiomas de espaço vetorial são satisfeitos, pois $V$ é um subconjunto das funções reais integráveis.

(g) O conjunto das funções contínuas em $[0,1]$ tais que $\int_0^1 f(x)dx \geq 0$.

**Solução**

O conjunto $V$ das funções contínuas em $[0,1]$ tais que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \geq 0$ não é fechado em relação a multiplicação por escalar.

De fato, sejam $f \in V$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx > 0$ e $\alpha = -1 \in \mathbb{R}$, então

$$\int_0^1 (\alpha f)(x)dx = \int_0^1 (-1)f(x)dx = (-1)\left(\int_0^1 f(x)dx\right) < 0 \Longrightarrow \alpha f \notin V.$$

(h) O conjunto dos vetores $(x,y,z)$ que satisfaz a equação linear $ax+by+cz=0$.

**Solução**

O conjunto $V$ dos vetores $(x,y,z)$ que satisfaz a equação linear $ax+by+cz=0$ é fechado em relação a adição e a multiplicação por escalar.

De fato, sejam $u=(x_1,y_1,z_1)$, $v=(x_2,y_2,z_2)$ em $V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $u+v = (x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ e $a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2) = ax_1+ax_2+by_1+by_2+cz_1+cz_2 = (ax_1+by_1+cz_1)+(ax_2+by_2+cz_2) = 0+0=0$.

ii. $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ e $a(\alpha x_1)+b(\alpha y_1)+c(\alpha z_1) = \alpha(ax_1+by_1+cz_1) = \alpha 0 = 0$.

Os 8 axiomas de espaço vetorial são satisfeitos, pois $V$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

(i) O conjunto das matrizes $3\times 3$ triangulares estritamente superiores, i.e., o conjunto das matrizes da forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Solução**

O conjunto $V$ das matrizes $3\times3$ triangulares estritamente superiores é fechado em relação a adição e a multiplicação por escalar.

De fato, sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ em $V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $A+B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+d & b+e \\ 0 & 0 & c+f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in V$.

ii. $\alpha A = \alpha\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha a & \alpha b \\ 0 & 0 & \alpha c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in V$.

Os 8 axiomas de espaço vetorial são satisfeitos, pois $V$ é um subconjunto das matrizes reais $3\times 3$.

2) Mostre que os seguintes conjuntos não são espaços vetoriais.

(a) O intervalo $[0,1]$ da reta real.

**Solução**

O intervalo $[0,1]$ da reta real não é fechado em relação a adição e a multiplicação por escalar.

De fato, sejam $u=v=1$ em $[0,1]$ e $\alpha = 3 \in \mathbb{R}$, então

i. $u+v = 1+1 = 2 \notin [0,1]$.

ii. $\alpha u = 3\times 1 = 3 \notin [0,1]$.

(b) O conjunto $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\leq 1, |y|\leq 1\big\}$. Que objeto geométrico é esse?

**Solução**

O conjunto $V = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\leq 1, |y|\leq 1\big\}$ não fechado em relação a adição e a multiplicação por escalar.

De fato, sejam $u=v=(1,1)$ em $V$ e $\alpha = 3 \in \mathbb{R}$, então

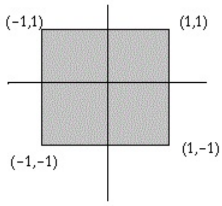


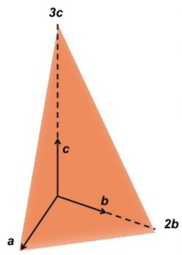

Figura 1: Objeto geométrico que descreve o conjunto $V$.

i. $u+v=(1,1)+(1,1)=(1+1,1+1)=(2,2)$ e $|2|=2>1 \Rightarrow u+v \notin V$.
ii. $\alpha u=3(1,1)=(3\times 1,3\times 1)=(3,3)$ e $|3|=3>1 \Rightarrow \alpha u \notin V$.

(c) O conjunto dos vetores $(x,y,z)$ que satisfaz a equação linear $ax+by+cz=d, d\neq 0$. Que objeto geométrico é esse? Qual é a diferença com a questão 1. (h)?

**Solução**

O conjunto dos vetores (x, y, z) que satisfaz a equação linear $ax+by+cz=d\neq 0$ não é um espaço vetorial, pois o elemento neutro $(0,0,0)$ não satizfaz a equação $ax+by+cz=d\neq 0$, ou seja, $a\times 0+b\times 0+c\times 0=0\neq d$.
A equação $ax+by+cz=d\neq 0$ descreve os planos que não passam pela origem. Um exemplo deste objeto geométrico está representado na figura abaixo.




Note que no exercício 1 item $h$, a equação descreve os planos que passam pela origem.

(d) O conjunto do plano $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)=(t,t^2), t\in\mathbb{R}\}$.

**Solução**

O conjunto $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)=(t,t^2), t\in\mathbb{R}\}$ não é fechado em relação a adição e a multiplicação por escalar.
De fato, sejam $u=(x_1,y_1)$ e $v=(x_2,y_2)$ em $V$ tais que $(x_1,y_1)=(t_1,t_1^2)$, $(x_2,y_2)=(t_2,t_2^2)$, $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ e $\alpha\neq 1$ em $\mathbb{R}$, então

i. $u+v=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)=(t_1+t_2,t_1^2+t_2^2)\neq(t_1+t_2,(t_1+t_2)^2)$ em geral. Como exemplo, tome $u=v=(1,1)\Rightarrow t_1=t_2=1$, então
$u+v=(1,1)+(1,1)=(1+1,1+1)=(1+1,1^2+1^2)=(2,2)\neq(2,2^2)=(2,4)$.
ii. $\alpha u=\alpha(x_1,y_1)=\alpha(t_1,t_1^2)=(\alpha t_1,\alpha t_1^2)\neq(\alpha t_1,\alpha^2 t_1^2)=(\alpha t_1,(\alpha t_1)^2)$ pois $\alpha\neq 1$.

3) Seja $V$ o conjunto de todos os pares ordenados $(x_1,x_2)$ de números reais. Determine se $V$ é um espaço vetorial se a soma ("+") e o produto escalar são **definidos** das formas abaixo. (Desconsidere a soma e multiplicação por escalar usuais.)

(a) $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1,x_2+y_2), a(x_1,x_2)=(ax_1,ax_2)$.

**Solução**

$V$ não é um espaço vetorial, pois a comutatividade falha. De fato, sejam $u=(x_1,x_2)$ e $v=(y_1,y_2)$ em $V$, então
$u+v=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1,x_2+y_2)$. Por outro lado,
$v+u=(y_1,y_2)+(x_1,x_2)=(y_1,y_2+x_2)$.
Em geral, $u+v\neq v+u$, por exemplo, tome $u=(1,2)$, $v=(2,1)$ e, assim,
$u+v=(1,2)+(2,1)=(1,2+1)=(1,3)$.
Por outro lado,
$v+u=(2,1)+(1,2)=(2,1+2)=(2,3)$.
Logo, $u+v\neq v+u$.

(b) $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2), a(x_1,x_2)=(ax_1,0)$.

**Solução**

$V$ não é espaço vetorial, pois falha a multiplicação pelo elemento identidade 1 de $\mathbb{R}$. De fato, seja $u=(x_1,x_2)$ em $V$, $x_2\neq 0$ e $\alpha=1\in\mathbb{R}$, então

$1u=1(x_1,x_2)=(1x_1,0)=(x_1,0)\neq(x_1,x_2)=u$.

(c) $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1+1,x_2+y_2), a(x_1,x_2)=(ax_1,ax_2)$.

**Solução**

$V$ não é espaço vetorial, pois a distributividade falha. De fato, sejam $u=(x_1,x_2)$ e $v=(y_1,y_2)$ em $V$ e $\alpha\neq 1$ em $\mathbb{R}$, então

$\alpha(u+v)=\alpha[(x_1,x_2)+(y_1,y_2)]=\alpha(x_1+y_1+1,x_2+y_2)=(\alpha x_1+\alpha y_1+\alpha,\alpha x_2+\alpha y_2)$. Por outro lado,

$\alpha u+\alpha v=\alpha(x_1,x_2)+\alpha(y_1,y_2)=(\alpha x_1,\alpha x_2)+(\alpha y_1,\alpha y_2)=(\alpha x_1+\alpha y_1+1,\alpha x_2+\alpha y_2)$.

(d) $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(|x_1+y_1|,|x_2+y_2|), a(x_1,x_2)=(ax_1,ax_2)$.

**Solução**

$V$ não é um espaço vetorial, pois a associatividade falha. De fato, sejam $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ e $w=(z_1,z_2)$ em $V$, então

$(u+v)+w=[(x_1,x_2)+(y_1,y_2)]+(z_1,z_2)=(|x_1+y_1|,|x_2+y_2|)+(z_1,z_2)=(||x_1+y_1|+z_1|,||x_2+y_2|+z_2|)$.

Por outro lado,

$u+(v+w)=(x_1,x_2)+[(y_1,y_2)+(z_1,z_2)]=(x_1,x_2)+(|y_1+z_1|,|y_2+z_2|)=(|x_1+|y_1+z_1||,|x_2+|y_2+z_2||)$.

Em geral, $(u+v)+w\neq u+(v+w)$. Por exemplo, sejam $u=(1,0)$, $v=(-1,0)$ e $w=(0,-1)$, então

$(u+v)+w=(||x_1+y_1|+z_1|,||x_2+y_2|+z_2|)=(||1-1|+0|,||0+0|-1|)=(0,1)$.

Por outro lado,

$u+(v+w)=(|x_1+|y_1+z_1||,|x_2+|y_2+z_2||)=(|1+|-1+0||,|0+|0-1||)=(2,1)$.

Portanto, $(u+v)+w\neq u+(v+w)$.

(e) $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_2), a(x_1,x_2)=(ax_1,ax_2)$.

**Solução**

$V$ não é espaço vetorial, pois a distributividade falha. De fato, sejam $u=(x_1,x_2)$ e $v=(y_1,y_2)$ em $V$ e $\alpha\neq 1$ em $\mathbb{R}$, então

$\alpha(u+v)=\alpha[(x_1,x_2)+(y_1,y_2)]=\alpha(x_1y_1,x_2y_2)=(\alpha x_1y_1,\alpha x_2y_2)$.

Por outro lado,

$\alpha u+\alpha v=\alpha(x_1,x_2)+\alpha(y_1,y_2)=(\alpha x_1,\alpha x_2)+(\alpha y_1,\alpha y_2)=(\alpha^2x_1y_1,\alpha^2y_1y_2)$.

Portanto, $\alpha(u+v)\neq\alpha u+\alpha v$.

4) Dados os espaços vetorias $V_1,V_2$ considere o conjunto $V=V_1\times V_2$ (produto cartesiano de $V_1$ por $V_2$), cujos elementos são os pares ordenados$v=(v_1,v_2)$, com $v_1\in V_1$ e $v_2\in V_2$. Defina operações que tornem $V$ um espaço vetorial. Verifique a validade de cada um dos axiomas.

**Solução**

Sejam $u=(u_1,u_2)$ e $v=(v_1,v_2)$ em $V$. A soma é definida por

$$u+v=(u_1+v_1,u_2+v_2).$$

A multiplicação por um escalar $\alpha$ é definida por

$$\alpha u=\alpha(u_1,u_2)=(\alpha u_1,\alpha u_2).$$

Vamos mostrar que o conjunto $V$ é um espaço vetorial com as operações acima definidas.

Sejam $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)$, $w=(w_1,w_2)$ em $V$ e $\alpha$, $\beta\in\mathbb{R}$, então

i. $u+v=(u_1,u_2)+(v_1,v_2)=(u_1+v_1,u_2+v_2)=\underbrace{(v_1+u_1,v_2+u_2)}_{\text{comutativa em}V_1\text{ e }V_2}=(v_1,v_2)+(u_1,u_2)=v+u.$

ii. $(u+v)+w=[(u_1,v_2)+(v_1,v_2)]+(w_1,w_2)=(u_1+v_1,u_2+v_2)+(w_1,w_2)=((u_1+v_1)+w_1,(u_2+v_2)+w_2)=\underbrace{(u_1+(v_1+w_1),u_2+(v_2+w_2))}_{\text{associativa em}V_1\text{ e }V_2}=(u_1,u_2)+(v_1+w_1,v_2+w_2)=u+(v+w).$

iii. $\overline{0} = (\overline{0}_1, \overline{0}_2)$ é o elemento nulo de $V$, em que $\overline{0}_i$ são elementos nulos de $V_i$,$i = 1, 2$. De fato, $u + \overline{0} = (u_1, u_2) + (\overline{0}_1, \overline{0}_2) = (u_1 + \overline{0}_1, u_2 + \overline{0}_2) = (u_1, u_2) = u$.

iv. $-u = (-u_1, -u_2)$ é o inverso de $V$. De fato, $u + (-u) = (u_1, u_2) + (-u_1, -u_2) = \underbrace{(u_1 - u_1, u_2 - u_2)}_{\text{inverso em} V_1 \text{ e } V_2} = (\overline{0}_1, \overline{0}_2) = \overline{0}$.

v. $\alpha(\beta u) = \alpha[\beta(u_1, u_2)] = \alpha(\beta u_1, \beta u_2) = (\alpha(\beta u_1), \alpha(\beta u_2)) = ((\alpha\beta)u_1, (\alpha\beta)u_2) = (\alpha\beta)u$.

vi. $\alpha(u + v) = \alpha[(u_1, u_2) + (v_1, v_2)] = \alpha(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (\alpha(u_1 + v_1), \alpha(u_2 + v_2)) = (\alpha u_1 + \alpha v_1, \alpha u_2 + \alpha v_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2) + (\alpha v_1, \alpha v_2) = \alpha(u_1, u_2) + \alpha(v_1, v_2) = \alpha u + \alpha v$.

vii. $(\alpha + \beta)u = (\alpha + \beta)(u_1, u_2) = ((\alpha + \beta)u_1, (\alpha + \beta)u_2) = (\alpha u_1 + \beta u_1, \alpha u_2 + \beta u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2) + (\beta u_1, \beta u_2) = \alpha(u_1, u_2) + \beta(u_1, u_2) = \alpha u + \beta u$.

viii. $1u = 1(u_1, u_2) = (1u_1, 1u_2) = (u_1, u_2) = u$.

Portanto, $V$ é um espaço vetorial.

5) Sejam $V$ um espaço vetorial, $\mathbf{v} \in V$ um elemento qualquer de $V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ um número real. Use os axiomas de espaço vetorial para provar que:

a) $\mathbf{v} + \mathbf{v} + \mathbf{v} = 3\mathbf{v}$;

b) $0.\mathbf{v} = \mathbf{0}$;

c) $\alpha.\mathbf{0} = \mathbf{0}$;

d) se $\alpha.\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $\alpha = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

**Solução**

d) Comece com a hipótese $\alpha\mathbf{v} = 0$ e separe em dois casos ($\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$).

6) Defina a média $\mathbf{u}\star\mathbf{v}$ entre dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ no espaço vetorial $V$ pondo $\mathbf{u}\star\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$. Prove que $(\mathbf{u}\star\mathbf{v})\star\mathbf{w} = \mathbf{u}\star(\mathbf{v}\star\mathbf{w})$ se e somente se $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.

**Solução**

Provar usando a definição de média dada. Este operção não satifaz o axioma associativo. Não se esqueça que é preciso provar a "ida" e a "volta" (por causa do "se e somente se").

7) Seja $V$ um espaço vetorial real. Verifique que $V$ e $\{0\}$ são subespaços de $V$

**Solução**

$V$ é um subespaço vetorial de $V$. De fato, sejam $u$, $v$ em $V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $0 \in V$, pois $V$ é espaço vetorial.

ii. $u + v \in V$, pois $V$ é espaço vetorial.

iii. $\alpha u \in V$, pois $V$ é espaço vetorial.

Portanto, $V$ é subespaço vetorial de $V$.

$\{0\}$ também é subespaço de $V$. De fato:

i. $0 \in \{0\}$.

ii. $0 + 0 = 0 \in \{0\}$.

iii. $\alpha 0 = 0 \in \{0\}$.

Portanto, $\{0\}$ é subespaço vetorial de $V$.

8) Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais?

(a) O conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $v = (x, y, z)$ tais que $z = 3x$ e $x = 2y$.

**Solução**

Os elementos do conjunto $X$ são os vetores $v = (2y, y, 6y)$, $y \in \mathbb{R}$. $X$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. De fato, sejam $u = (2y_1, y_1, 6y_1)$, $v = (2y_2, y_2, 6y_2)$ em $X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $(0,0,0) \in X$, basta tomar $y = 0$.
ii. $u + v = (2y_1, y_1, 6y_1) + (2y_2, y_2, 6y_2) = (2y_1 + 2y_2, y_1 + y_2, 6y_1 + 6y_2) =$
$= (2(y_1 + y_2), y_1 + y_2, 6(y_1 + y_2)) \in X$.
iii. $\alpha u = \alpha(2y_1, y_1, 6y_1) = (\alpha 2y_1, \alpha y_1, \alpha 6y_1) = (2(\alpha y_1), \alpha y_1, 6(\alpha y_1)) \in X$.

Portanto, $X$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) O conjunto $Y \subset \mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $v = (x, y, z)$ tais que $xy = 0$.

**Solução**

$Y$ não é um espaço vetorial, pois não é fechado em relação a soma. De fato, sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ em $Y$ tais que $x_1y_1 = 0$ e $x_2y_2 = 0$, então

$u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ e $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 = x_1y_2 + x_2y_1 \neq 0$ em geral.

Como exemplo, tome $x_2 = y_1 = 1$, $x_1 = y_2 = 0$ e, assim, sejam $u = (0,1,0)$, $v = (1,0,0)$ em $Y$, então

$u + v = (0,1,0) + (1,0,0) = (1,1,0)$ e $1 \times 1 = 1 \neq 0 \Longrightarrow u + v \notin Y$.

Portanto, $Y$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

O conjunto $Y$ é união de duas retas $(x, y, z)$ tais que $x = 0 \cup y = 0$. A união não necessariamente é subespaço.

(c) O conjunto $\mathbb{F} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formado pelas funções $f$ tais que $f(x+1) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

**Solução**

$\mathbb{F}$ é um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De fato, sejam $f, g \in \mathbb{F}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. A função nula $0(x)$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ está em $\mathbb{F}$, pois $0(x+1) = 0(x)$.
ii. $(f+g)(x+1) = f(x+1) + g(x+1) = f(x) + g(x) = (f+g)(x) \Rightarrow f + g \in \mathbb{F}$.
iii. $(\alpha f)(x+1) = \alpha f(x+1) = \alpha f(x) = (\alpha f)(x) \Rightarrow \alpha f \in \mathbb{F}$.

Portanto, $\mathbb{F}$ é subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

é o subespaço das funções periódicas, de período 1.

(d) O conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^5$ que tem duas ou mais coordenadas nulas.

**Solução**

O conjunto $X$ dos vetores $v \in \mathbb{R}^5$ que tem duas ou mais coordenadas nulas não é um subespaço vetoial. De fato, sejam $u = (a_1, a_2, 0, 0, 0)$, $v = (0, 0, a_3, a_4, a_5)$ em $X$, $a_i \neq 0$, $i = 1, ..., 5$, então

$u + v = (a_1, a_2, 0, 0, 0) + (0, 0, a_3, a_4, a_5) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \notin X$.

Portanto, $X$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^5$.

Este conjunto também pode ser pensado como união de subespaços, e por tanto, não necessariamente subespaço.

(e) O conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^3$ que tem pelo menos uma coordenada $\geq 0$.

**Solução**

O conjunto $V$ dos vetores $v \in \mathbb{R}^3$ que tem pelo menos uma coordenada $\geq 0$ não é subespaço vetoial de $\mathbb{R}^3$. De fato, sejam $v = (1,1,1)$ em $V$ e $\alpha = -1 \in \mathbb{R}$, então

$\alpha v = (-1)(1,1,1) = (-1,-1,-1) \notin V$.

Portanto, $V$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(f) O conjunto dos vetores $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^3 + 3x = y^2 + 3y$.

**Solução**

O conjunto $V$ dos vetores $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^3 + 3x = y^2 + 3y$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.De fato, sejam $u = v = (1,1)$ em $V$, então

$u + v = (1,1) + (1,1) = (2,2)$ e $2^3 + 3.2 \neq 2^2 + 3.2 \Rightarrow u + v \notin V$.

Portanto, $V$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

9) Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$.

**Solução**

O subconjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. De fato, sejam $u = (0, y_1, z_1)$, $v = (0, y_2, z_2)$ em $V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $(0,0,0) \in V$

ii. $u+v=(0,y_1,z_1)+(0,y_2,z_2)=(0,y_1+y_2,z_1+z_2)\in V$.
iii. $\alpha u=\alpha(0,y_1,z_1)=(0,\alpha y_1,\alpha z_1)\in V$.

Portanto, $V$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y=z\}$.

**Solução**

O subconjunto $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y=z\}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. De fato, sejam $u=(x_1,y_1,z_1)$, $v=(x_2,y_2,z_2)$ em $V$, com $x_1=y_1=z_1$, $x_2=y_2=z_2$ e $\alpha\in\mathbb{R}$, então

i. $(0,0,0)\in V$
ii. $u+v=(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)\in V$. E temos que $x_1+x_2=y_1+y_2=z_1+z_2$ somando as igualdades acima.
iii. $\alpha u=(\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1)$. E temos que $\alpha x_1=\alpha y_1=\alpha z_1$

Portanto, $V$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(c) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=0\}$.

**Solução**

O subconjunto $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=0\}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. De fato, sejam $u=(x_1,y_1,z_1)$, $v=(x_2,y_2,z_2)$ em $V$, tais que $x_1+y_1=0$, $x_2+y_2=0$ e $\alpha\in\mathbb{R}$, então

i. $(0,0,0)\in V$
ii. $u+v=(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$ e $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=0+0=0\Rightarrow u+v\in V$.
iii. $\alpha u=\alpha(x_1,y_1,z_1)=(\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1)$ e $\alpha x_1+\alpha y_1=\alpha(x_1+y_1)=\alpha 0=0\Rightarrow \alpha u\in V$.

Portanto, $V$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(d) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y\geq 0\}$

**Solução**

O subconjunto $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y\geq 0\}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. De fato, sejam $u=(0,1,0)$ em $V$ e $\alpha=-1\in\mathbb{R}$, então

$\alpha u=(-1)(0,1,0)=(0,-1,0)\notin V$.

Portanto, $V$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

10) Seja $V$ um espaço vetoriais real. Sejam $W_1$ e $W_2$ dois subespaços vetoriais de $V$. Mostre que $W_1\cap W_2$ é, ainda, um subespaço vetorial de $V$.

**Prova**

Sejam $u$, $v\in W_1\cap W_2$ e $\alpha\in\mathbb{R}$, então

i. $0\in W_1\cap W_2$.
ii. $u$, $v\in W_1$ e $u+v\in W_1$, pois $W_1$ é subespaço vetorial de $V$. Também,
$u$, $v\in W_2$ e $u+v\in W_2$, pois $W_2$ é subespaço vetorial de $V$.
Logo, $u+v\in W_1\cap W_2$.
iii. $u\in W_1$ e $\alpha u\in W_1$, pois $W_1$ é subespaço vetorial de $V$. Também,
$u\in W_2$ e $\alpha u\in W_2$, pois $W_2$ é subespaço vetorial de $V$.
Logo, $\alpha u\in W_1\cap W_2$.

Portanto, $W_1\cap W_2$ é subespaço vetorial de $V$.

11) Seja $S$ o conjunto das funções $y$ satisfazendo a equação

$$2\frac{dy}{dx}+3y=0$$

(a) Mostre que o conjunto $S$ é não vazio.

**Solução**

O conjunto $S$ é não vazio, pois a função nula $y\equiv 0$ pertence a $S$.

(b) Mostre que $S$ é um subespaço do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**Solução**

sejam $y_1$, $y_2$ em $S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $y \equiv 0 \in S$.

ii. $2\dfrac{d(y_1 + y_2)}{dx} + 3(y_1 + y_2) = 2\dfrac{d(y_1)}{dx} + 2\dfrac{d(y_1)}{dx} + 3y_1 + 3y_2 = (2\dfrac{d(y_1)}{dx} + 3y_1) + (2\dfrac{d(y_2)}{dx} + 3y_2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 \in S.$

iii. $2\dfrac{d(\alpha y_1)}{dx} + 3y_1 = \alpha(2\dfrac{d(y_1)}{dx} + 3y_1) = \alpha 0 = 0 \Rightarrow \alpha y_1 \in S.$

Portanto, $S$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.