Álgebra Linear - 2019.1

Lista 2 - Espaços e subespaços Vetoriais

1) Para os conjuntos seguintes, determine se são espaços vetoriais reais, se a adição e multiplicação são as usuais.

   (a) O conjunto dos polinômios de grau menor o igual a n (considerando o polinômio nulo, que não tem grau, pertencente a este conjunto).

   (b) O conjunto de todas as funções reais tais que $f(0) = f(1)$.

   (c) O conjunto das funções tais que $f(0) = 1 + f(1)$.

   (d) O conjunto das funções reais crescentes.

   (e) O conjunto das funções reais pares.

   (f) O conjunto das funções contínuas em $[0, 1]$ tais que $\int_0^1 f(x)dx = 0$

   (g) O conjunto das funções contínuas em $[0, 1]$ tais que $\int_0^1 f(x)dx \geq 0$

   (h) O conjunto dos vetores (x, y, z) que satisfaz a equação linear $ax + by + cz = 0$.

   (i) O conjunto das matrizes 3×3 triangulares estrictamente superiores, i.e., o conjunto das matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Mostre que os seguintes conjuntos a seguir não são espaços vetoriais.

   (a) O intervalo $[0, 1]$ da reta real.

   (b) O conjunto $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\right\}$. Que objeto geométrico é esse?

   (c) O conjunto dos vetores (x, y, z) que satisfaz a equação linear $ax + by + cz = d, d \neq 0$. Que objeto geométrico é esse? Qual é a diferença com a questão 1. (h)?

   (d) O conjunto do plano $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (t, t^2), t \in \mathbb{R}\right\}$.

3) Seja V o conjunto de todos os pares ordenados (x_1, x_2) de números reais. Determine se V é um espaço vetorial se a soma ("+") e o produto escalar são **definidos** das formas abaixo. (Desconsidere a soma e multiplicação por escalar usuais.)

   (a) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, x_2 + y_2), a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$

   (b) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), a(x_1, x_2) = (ax_1, 0)$

   (c) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2), a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$

   (d) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|), a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$

   (e) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2), a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$

4) Dados os espaços vetorias V_1, V_2 considere o conjunto $V = V_1 \times V_2$ (produto cartesiano de V_1 por V_2), cujos elementos são os pares ordenados$v = (v_1, v_2)$, com $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Defina operações que tornem V um espaço vetorial. Verifique a validade de cada um dos axiomas.

5) Sejam V um espaço vetorial, $\mathbf{v} \in V$ um elemento qualquer de V e $\alpha \in \mathbb{R}$ um número real. Use os axiomas de espaço vetorial para provar que:

   a) $\mathbf{v} + \mathbf{v} + \mathbf{v} = 3\mathbf{v}$;

   b) $0.\mathbf{v} = \mathbf{0}$;

   c) $\alpha.\mathbf{0} = \mathbf{0}$;

   d) se $\alpha.\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $\alpha = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

6) Defina a média $\mathbf{u} \star \mathbf{v}$ entre dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ no espaço vetorial V pondo $\mathbf{u} \star \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$. Prove que $(\mathbf{u} \star \mathbf{v}) \star \mathbf{w} = \mathbf{u} \star (\mathbf{v} \star \mathbf{w})$ se e somente se $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.

7) Seja V um espaço vetoriais real. Verifique que V e $\{0\}$ são subespaços de V

8) Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais?

   (a) O conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $v = (x, y, z)$ tais que $z = 3x$ e $x = 2y$.

   (b) O conjunto $Y \subset \mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $v = (x, y, z)$ tais que $xy = 0$.

   (c) O conjunto $\mathbb{F} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formado pelas funções f tais que $f(x + 1) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (d) O conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^5$ que tem duas ou mais coordenadas nulas.

   (e) O conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^3$ que tem pelo menos uma coordenada ≥ 0.

   (f) O conjunto dos vetores $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^3 + 3x = y^2 + 3y$.

9) Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$?

   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$.

   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$.

   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$.

   (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0\}$

10) Seja V um espaço vetoriais real. Sejam W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de V. Mostre que $W_1 \cap W_2$ é, ainda, um subespaço vetorial de V.

11) Seja S o conjunto das funções y satisfazendo a equação

$$2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

(a) Mostre que o conjunto S é não vazio.

(b) Mostre que S é um subespaço do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.