Álgebra Linear - 2019.1

Lista 3 - Dependência e Independência Linear, Bases e Soma Direta

1) Exiba três vetores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ com as seguintes propriedades: nenhum deles é múltiplo do outro, nenhuma das coordenadas é igual a zero e $\mathbb{R}^3$ não é gerado por eles.

Solução

Tome $u = (1,1,1)$, $v = (1,1,2)$ e $w = u + v = (1,1,1) + (1,1,2) = (2,2,3)$. Temos que nehuma coordenada é nula e nenhum vetor é múltiplo do outro. No entanto, não geram $\mathbb{R}^3$, pois w é combinação linear de u e v.

2) Mostre que a matriz $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{bmatrix}$ pode ser escrita como combinação linear das matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solução

Queremos encontrar constantes a, b e c, tais que

$$a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{bmatrix}.$$

Da igualdade de matrizes acima obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a - b + c = 4 \\ 2a + 2b - 2c = -4 \\ 3a + 3b - 3c = -6 \\ 4a - 4b + 4c = 16 \end{cases},$$

cuja matiz ampliada do sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 4 \\ 2 & 2 & -2 & \vdots & -4 \\ 3 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 4 & -4 & 4 & \vdots & 16 \end{bmatrix}.$$

Sua forma escada reduzida por linhas é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Da primeira linha obtemos que $a = 1$ e da segunda linha obtemos que $b = -3 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Logo, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + (-3 + c) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{bmatrix},$$

para cada $c \in \mathbb{R}$. Por exemplo, para $c = 3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{bmatrix}.$$

3) Assinale V(verdadeiro) ou F(falso) e justifique sua resposta.

(a) O vetor $w = (1, -1, 2)$ pertence ao subespaço gerado por $u = (1, 2, 3)$ e $v = (3, 2, 1)$.

Solução

Para o vetor w pertencer ao espaço gerado pelos vetores u e v é necessário que existam constantes a e b tais que

$$a(1, 2, 3) + b(3, 2, 1) = (1, -1, 2).$$

Da igualdade de vetores acima obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 3b = 1 \\ 2a + 2b = -1 \\ 3a + b = 2 \end{cases},$$

cuja matiz ampliada do sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & 2 & \vdots & -1 \\ 3 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}.$$

Sua forma escada reduzida por linhas é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \vdots & 5 \end{bmatrix}.$$

Pela última linha vemos que o sistema é impossível e, assim, w não pertence ao espaço gerado pelos vetores u e v. Portanto, a afirmação é falsa.

(b) Se $X \subset Y$ então $[X] \subset [Y]$.

Prova

Seja $x \in [X] \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $x_i \in X$. No entanto, como $X \subset Y \Rightarrow x_i \in Y \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in [Y]$.

Portanto, $[X] \subset [Y]$.

(c) Se $[X] \subset [Y]$ então $X \subset Y$.

Solução

A afirmação é falsa. De fato, tome $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e, assim, $\mathbb{R}^2 = [X] \subset [Y] = \mathbb{R}^2$, mas $\mathbb{R}^2 = X \not\subset Y = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

4) Para cada uma das seguintes coleções de vetores, determine quando o primeiro vetor é combinação linear dos vetores restantes:

(a) $(1, 2, 3), (1, 0, 1), (2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Solução

Queremos encontrar constantes a e b tais que

$$a(1, 0, 1) + b(2, 1, 0) = (1, 2, 3).$$

Da igualdade de vetores acima obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 2b = 1 (*) \\ b = 2 \\ a = 3 \end{cases},$$

cuja matiz ampliada do sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & \vdots & 3 \end{bmatrix}.$$

Sua forma escada reduzida por linhas é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \vdots & 6 \end{bmatrix}.$$

Pela última linha vemos que o sistema é impossível e, assim, $(1,2,3)$ não é combinação linear dos vetores $(1,0,1)$ e $(2,1,0)$.

Note que poderíamos ter resolvido este exercício mostrando que os valores encontrados para a e b não satisfazem $(*)$. Também, poderíamos ter mostrando que os três vetores são L.I e, assim, o primeiro vetor não é combinação linear dos outros dois.

(b) $x^3 + 2x^2 + 3x + 1; x^3; x^2 + 3x; x^2 + 1 \in \mathcal{P}_4$.

Solução

Queremos encontrar constantes a, b e c tais que

$$ax^3 + b(x^2 + 3x) + c(x^2 + 1) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1.$$

$$ax^3 + (b + c)x^2 + 3bx + c = x^3 + 2x^2 + 3x + 1.$$

Da igualdade de polinômios acima, temos

$a = 1$, $b + c = 2$, $3b = 3 \Rightarrow b = 1$ e $c = 1$.

Logo, $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$

Portanto, o primeiro vetor é combinação linear dos outros três.

(c) $(1,3,5,7), (1,0,1,0), (0,1,0,1), (0,0,1,1) \in \mathbb{R}^4$

Solução

Queremos encontrar costantes a, b e c tais que

$$a(1,0,1,0) + b(0,1,0,1) + c(0,0,1,1) = (1,3,5,7).$$

Da igualdade de vetores acima, temos

$a = 1$, $b = 3$, $a + c = 5 \Rightarrow c = 4$ e $b + c = 7$.

Logo, $a = 1$, $b = 3$ e $c = 4$.

Portanto, o primeiro vetor é combinação linear dos outros três.

5) Para cada uma das seguintes coleções de vetores, determine quando os vetores são linearmente independentes:

(a) $(1,2,3), (1,0,1), (2,1,0) \in \mathbb{R}^3$.

Solução

Queremos encontrar costantes a, b e c tais que

$$a(1,2,3) + b(1,0,1) + c(2,1,0) = (0,0,0).$$

Da igualdade de vetores acima, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 2a + c = 0 \\ 3a + b = 0 \end{cases},$$

cuja matiz ampliada do sistema é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Sua forma escada reduzida por linhas é:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Portanto, temos como solução $a = b = c = 0$ e, assim, os vetores são linearmente independentes.

(b) $(1, 2), (3, 5), (-1, 3) \in \mathbb{R}^2$.

Solução

Queremos encontrar costantes a, b e c tais que

$$a(1, 2) + b(3, 5) + c(-1, 3) = (0, 0).$$

Da igualdade de vetores acima, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 3b - c = 0 \\ 2a + 5b + 3c = 0 \end{cases},$$

cuja matiz ampliada do sistema é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Sua forma escada reduzida por linhas é:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, temos como solução $a = -14c$, $b = 5c$, $c = c \in \mathbb{R}$. Logo, vale

$$-14c(1, 2) + 5c(3, 5) + c(-1, 3) = (0, 0).$$

para cada $c \in \mathbb{R}$.

Portanto, uma vez que a solução é diferente da trivial, se $c \neq 0$, os vetores são linearmente dependentes. Por exemplo para $c = 1$ temos:

$$-14(1, 2) + 5(3, 5) + (-1, 3) = (0, 0).$$

(c) $(2, 5, -3, 6), (1, 0, 0, 1), (4, 0, 9, 6) \in \mathbb{R}^4$.

Solução

Queremos encontrar costantes a, b e c tais que

$$a(2, 5, -3, 6) + b(1, 0, 0, 1) + c(4, 0, 9, 6) = (0, 0, 0, 0).$$

Da igualdade de vetores acima, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b + 4c = 0 \\ 5a = 0 \\ -3a + 9c = 0 \\ 6a + b + 6c = 0 \end{cases},$$

cuja solução é $a = b = c = 0$.

Portanto, o conjunto de vetores é linearmente independente.

(d) $x^2+1, x+1, x^2+x \in \mathcal{P}_3$.

Solução

Queremos encontrar constantes a, b e c tais que

$$a(x^2+1)+b(x+1)+c(x^2+x) = 0x^3+0x^2+0x+0.$$

$$(a+c)x^2+(b+c)x+a+b = 0x^3+0x^2+0x+0.$$

Da igualdade de polinômios acima temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ -a+c=0 \\ b=-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}.$$

Portanto, os vetores são linearmente independentes.

(e) $2x^2+3, x^2+1, 1 \in \mathcal{P}_3$.

Solução

Queremos encontrar constantes a, b e c tais que

$$a(2x^2+3)+b(x^2+1)+c = 0x^3+0x^2+0x+0.$$

$$(2a+b)x^2+3a+b+c = 0x^3+0x^2+0x+0.$$

Da igualdade de polinômios acima temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2a+b=0 \\ 3a+b+c=0 \end{cases}.$$

Pela primeira linha $b=-2a$, substituindo na segunda linha temos que $3a-2a+c=0 \Leftrightarrow a+c=0 \Rightarrow c=-a$. Logo, temos

$$a(2x^2+3)-2a(x^2+1)-a = 0x^3+0x^2+0x+0 = 0.$$

para todo $a \in \mathbb{R}$.

Portanto, os vetores são linearmente dependentes para $a \neq 0$. Por exemplo para $a=1$:

$$(2x^2+3)-2(x^2+1)-1 = 0.$$

(f) $2x^2+3, x^3+1, x^3+x^2, 1 \in \mathcal{P}_3$.

Solução

Queremos encontrar constantes a, b, c e d tais que

$$a(2x^2+3)+b(x^3+1)+c(x^3+x^2)+d = 0x^3+0x^2+0x+0.$$

$$(b+c)x^3+(2a+c)x^2+3a+b+d = 0x^3+0x^2+0x+0.$$

Da igualdade de polinômios acima temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} b+c=0 \\ 2a+c=0 \\ 3a+b+d=0 \end{cases},$$

cuja matiz ampliada é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Sua forma escada reduzida por linhas é:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{array}\right].$$

Assim, temos como solução $a = -\frac{1}{5}d$, $b = -\frac{2}{5}d$, $c = \frac{2}{5}d$, $d = d \in \mathbb{R}$. Logo, vale

$$-\frac{1}{5}d(2x^2+3) - \frac{2}{5}d(x^3+1) + \frac{2}{5}d(x^3+x^2) + d = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0.$$

para cada $d \in \mathbb{R}$.

Portanto, uma vez que a solução é diferente da trivial para $d \neq 0$, os vetores são linearmente dependentes. Por exemplo, para $d = 1$, temos

$$-\frac{1}{5}(2x^2+3) - \frac{2}{5}(x^3+1) + \frac{2}{5}(x^3+x^2) + 1 = 0.$$

6) Encontre uma base para os seguintes subespaços e estenda a uma base de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ conforme corresponda.

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$.

Solução

Seja $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$, temos que

$$(0,y,z) = (0,y,0) + (0,0,z) = y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Logo, $V = [\{(0,1,0),(0,0,1)\}]$ e como $\beta_1 = \{(0,1,0),(0,0,1)\}$ é claramente linearmente independente, segue que β_1 é uma base para V.

Para estender a uma base do $\mathbb{R}^3$, tome $(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ e, então, $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a nossa conhecida base canônica do $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : w = x+y \text{ e } z = x-y\}$.

Solução

Os elementos de $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : w = x+y \text{ e } z = x-y\}$ são da forma:

$$(x,y,x-y,x+y) = (x,0,x,x) + (0,y,-y,y) = x(1,0,1,1) + y(0,1,-1,1).$$

Temos que $V = [\{(1,0,1,1),(0,1,-1,1)\}]$ e o conjunto $\beta_1 = \{(1,0,1,1),(0,1,-1,1)\}$ é linearmente independente, pois

$$a(1,0,1,1) + b(0,1,-1,1) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow a = b = 0.$$

Portanto, $\beta_1 = \{(1,0,1,1),(0,1,-1,1)\}$ é uma base para V.

Para estender a uma base do $\mathbb{R}^4$, tome $(1,0,0,0),(0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$.

O conjunto $\beta = \{(1,0,1,1),(0,1,-1,1),(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$ é linearmente independente. De fato,

$$a(1,0,1,1) + b(0,1,-1,1) + c(1,0,0,0) + d(0,0,0,1) = (0,0,0,0).$$

Da igualdade de vetores acima obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \\ a - b = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases},$$

cuja solução é $a = b = c = d = 0$.

Portanto, β é linearmente independente e como a $dim(\mathbb{R}^4) = 4$, segue que β é uma base de $\mathbb{R}^4$.

(c) O plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 5z = 0\}$.
Solução
Os elementos de $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 5z = 0\}$ são da forma:

$$\left(x, y, -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y\right) = \left(x, 0, -\frac{3}{5}x\right) + \left(0, y, \frac{2}{5}y\right) = x\left(1, 0, -\frac{3}{5}\right) + y\left(0, 1, \frac{2}{5}\right).$$

Temos que $V = \left[\left\{\left(1,0,-\frac{3}{5}\right), \left(0,1,\frac{2}{5}\right)\right\}\right]$ e o conjunto $\beta_1 = \left\{\left(1,0,-\frac{3}{5}\right), \left(0,1,\frac{2}{5}\right)\right\}$ é linearmente independente, pois

$$a\left(1, 0, -\frac{3}{5}\right) + b\left(0, 1, \frac{2}{5}\right) = (0,0,0) \Leftrightarrow a = b = 0.$$

Portanto, $\beta_1 = \left\{\left(1,0,-\frac{3}{5}\right), \left(0,1,\frac{2}{5}\right)\right\}$ é uma base para V.
Para estender a uma base de $\mathbb{R}^3$, tome $(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$, $(0,0,1) \notin \left[\left\{\left(1,0,-\frac{3}{5}\right), \left(0,1,\frac{2}{5}\right)\right\}\right] = V$ e o conjunto $\beta = \left\{\left(1,0,-\frac{3}{5}\right), \left(0,1,\frac{2}{5}\right), (0,0,1)\right\}$ é linearmente independente, pois

$$a\left(1, 0, -\frac{3}{5}\right) + b\left(0, 1, \frac{2}{5}\right) + c(0,0,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Como a $dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$, concluímos que β é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(d) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ e } 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.
Solução
Primeiramente vamos encontrar a forma dos elementos de $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ e } 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$. Temos que,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases},$$

cuja matiz ampliada é dada por:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Sua forma escada reduzida por linhas é:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, temos como solução $x_1 = -\frac{1}{4}x_3$ e $x_2 = -\frac{1}{4}x_3 - x_4$, $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.
Logo, os elementos de V são da forma:
$(-\frac{1}{4}x_3, -\frac{1}{4}x_3 - x_4, x_3, x_4) = (-\frac{1}{4}x_3, -\frac{1}{4}x_3, x_3, 0) + (0, -x_4, 0, x_4) = x_3(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0) + x_4(0, -1, 0, 1)$.
Temos que $V = \left[\left\{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right), (0,-1,0,1)\right\}\right]$ e o conjunto $\beta_1 = \left\{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right), (0,-1,0,1))\right\}$ é linearmente independente, pois

$$a\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right) + b(0,-1,01,1) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow a = b = 0.(\text{exercício})$$

Portanto, $\beta_1 = \left\{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right), (0,-1,0,1)\right\}$ é uma base para V.
Para estender a uma base de $\mathbb{R}^4$, tome $(1,0,0,0), (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$, temos que
$(1,0,0,0), (0,0,0,1) \notin \left[\left\{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right), (0,-1,0,1)\right\}\right] = V$ e o conjunto

$$\beta = \left\{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right), (0,-1,0,1), (1,0,0,0), (0,0,0,1)\right\}$$

é linearmente independente, pois

$$a\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right) + b(0,-1,0,1) + c(1,0,0,0) + d(0,0,0,1) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow a = b = c = d = 0.$$

(exercício).
Como a $dim\left(\mathbb{R}^4\right) = 4$, concluímos que β é uma base de $\mathbb{R}^4$.

7) Seja $\mathcal{P}_n$ o conjunto dos polinômios reais de grau menor igual que n. Para cada um dos itens seguintes seja S o conjunto dos polinômios em $\mathcal{P}_k$ satisfazendo a condição dada. Determine se S é um subespaço de $\mathcal{P}_n$. Se S for um subspaço calcule a dimensão de S.

(a) $p(0) = 0$

Solução

O conjunto S dos polinômios em $\mathcal{P}_k$ que satisfazem $p(0) = 0$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_n$. De fato, sejam p, q em S e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $\overline{0}(x) \in S$, pois $\overline{0}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{0}(0) = 0$.
ii. $(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow p + q \in S$.
iii. $(\alpha p)(0) = \alpha p(0) = \alpha 0 = 0 \Rightarrow \alpha p \in S$.

Portanto, S é subespaço vetorial de $\mathcal{P}_n$

Para calcular a $dim(S)$ considere $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k$ em $\mathcal{P}_k$. Temos que os polinômios em S satisfazem, $p(0) = a_0 = 0$.

Logo, os polinômios em S são da forma $p(x) = a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k$ e, assim, uma base para S é $\beta = \{x, x^2, ..., x^k\}$.

Portanto, a $dim(S) = k$.

(b) $p'(0) = 0$

Solução

O conjunto S dos polinômios em $\mathcal{P}_k$ que satisfazem $p'(0) = 0$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_n$. De fato, sejam p, q em S e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $\overline{0}(x) \in S$, pois $\overline{0}'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{0}'(0) = 0$.
ii. $(p+q)'(0) = p'(0) + q'(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow p + q \in S$.
iii. $(\alpha p)'(0) = \alpha p'(0) = \alpha 0 = 0 \Rightarrow \alpha p \in S$.

Portanto, S é subespaço vetorial de $\mathcal{P}_n$

Para calcular a $dim(S)$ considere $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k$ em $\mathcal{P}_k$. Temos que os polinômios em S satisfazem, $p'(0) = a_1 = 0$.

Logo, os polinômios em S são da forma $p(x) = a_0 + a_2 x^2 + ... + a_k x^k$ e, assim, uma base para S é $\beta = \{1, x^2, ..., x^k\}$.

Portanto, a $dim(S) = k$.

(c) $p''(0) = 0$

Solução

O conjunto S dos polinômios em $\mathcal{P}_k$ que satisfazem $p''(0) = 0$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_n$. De fato, sejam p, q em S e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $\overline{0}(x) \in S$, pois $\overline{0}''(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{0}''(0) = 0$.
ii. $(p+q)''(0) = p''(0) + q''(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow p + q \in S$.
iii. $(\alpha p)''(0) = \alpha p''(0) = \alpha 0 = 0 \Rightarrow \alpha p \in S$.

Portanto, S é subespaço vetorial de $\mathcal{P}_n$

Para calcular a $dim(S)$ considere $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k$ em $\mathcal{P}_k$. Temos que os polinômios em S satisfazem, $p''(0) = a_2 = 0$.

Logo, os polinômios em S são da forma $p(x) = a_0 + a_1 x + a_3 x^3 + ... + a_k x^k$ e, assim, uma base para S é $\beta = \{1, x, x^3, ..., x^k\}$.

Portanto, a $dim(S) = k$.

(d) $p'(0) + p(0) = 0$

Solução

O conjunto S dos polinômios em $\mathcal{P}_k$ que satisfazem $p'(0) + p(0) = 0$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_n$. De fato, sejam p, q em S e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $\overline{0}(x) \in S$, pois $\overline{0}'(x) + \overline{0}(x) = 0 + 0 = 0$.
ii. $((p' + p) + (q' + q))(0) = (p' + p)(0) + (q' + q)(0) = p'(0) + p(0) + q'(0) + q(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow p + q \in S$.
iii. $(\alpha(p' + p))(0) = \alpha(p' + p)(0) = \alpha(p'(0) + p(0)) = \alpha 0 = 0 \Rightarrow \alpha p \in S$.

Portanto, S é subespaço vetorial de $\mathcal{P}_n$

Para calcular a $dim(S)$ considere $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k$ em $\mathcal{P}_k$. Temos que

$$p'(x) + p(x) = a_1 + 2a_2x + ... + ka_kx^{k-1} + a_0 + a_1x + ... + a_kx^k.$$

Os polinômios em S satisfazem, $p'(0) + p(0) = a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_0$.

Logo, os polinômios em S são da forma $p(x) = a_0(1-x) + a_2x^2 + ... + a_kx^k$ e, assim, uma base para S é $\beta = \{1-x, x^2, ..., x^k\}$.

Portanto, a $dim(S) = k$.

(e) O conjunto dos polinômios de grau igual ou menor que k. (com $k < n$)

Solução

O conjunto dos polinômios $\mathcal{P}_k$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_n$ (com $k < n$) . De fato, sejam $p(x) = \sum_{j=0}^{k} a_jx^j$, $q(x) = \sum_{j=0}^{k} b_jx^j$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $\overline{0}(x) \in \mathcal{P}_k$, pois $\overline{0}(x) = \sum_{j=0}^{k} 0x^j$.

ii. $(p+q)(x) = \sum_{j=0}^{k} a_jx^j + \sum_{j=0}^{k} b_jx^j = \sum_{j=0}^{k}(a_j + b_j)x^j \in \mathcal{P}_k$.

iii. $(\alpha p)(x) = \alpha \sum_{j=0}^{k} a_jx^j = \sum_{j=0}^{k}(\alpha a_j)x^j \in \mathcal{P}_k$.

Portanto, $\mathcal{P}_k$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}_n$

Sabemos que uma base para $\mathcal{P}_k$ é $\beta = \{1, x, x^2, ..., x^k\}$.

Portanto, a $dim(S) = k + 1$.

8) Determine se os conjuntos abaixo são subespaços de $M(2,2)$. Em caso afirmativo exiba uma base:

(a) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $b = c$.

Solução

O conjunto $\mathbf{V}$ é subespaço de $M(2,2)$. De fato, sejam $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$, pois $b = c = 0$

ii. $A + B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$.

iii. $\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha b_1 & \alpha d_1 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$.

Portanto, $\mathbf{V}$ é subespaço de $M(2,2)$.

Agora vamos encontrar uma base para $\mathbf{V}$. Temos que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\mathbf{V} = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right]$ e $\beta = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é linearmente independente.

Portanto, β é uma base para V.

(b) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $b = 0 = c$.

Solução

O conjunto $\mathbf{V}$ é subespaço de $M(2,2)$. De fato, sejam $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$, pois $b = 0 = c$.

ii. $A + B = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$.

iii. $\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & 0 \\ 0 & \alpha d_1 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$.

Portanto, $\mathbf{V}$ é subespaço de $M(2,2)$.
Agora vamos encontrar uma base para $\mathbf{V}$. Temos que

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\mathbf{V} = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right]$ e $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é linearmente independente.
Portanto, β é uma base para V.

(c) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a = 0$.

Solução

O conjunto $\mathbf{V}$ é subespaço de $M(2,2)$. De fato, sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$, pois $a = 0$.

ii. $A + B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$.

iii. $\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$.

Portanto, $\mathbf{V}$ é subespaço de $M(2,2)$.
Agora vamos encontrar uma base para $\mathbf{V}$. Temos que

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\mathbf{V} = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right]$ e $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é linearmente independente.
Portanto, β é uma base para V.

9) Mostre que os polinômios $1 - t^3, (1-t)^2, 1 - t$ e 1 geram o espaço dos polinômios de grau menor igual a 3.

Solução

Queremos encontrar constantes a, b, c e d, tais que

$$a(1 - t^3) + b(1 - 2t + t^2) + c(1 - t) + d = 0t^3 + 0t^2 + 0t + 0$$

$$-at^3 + bt^2 + (-2b - c)t + a + b + c + d = 0t^3 + 0t^2 + 0t + 0$$

Da igualdade de polinômios acima obtemos que $a = b = c = d = 0$.

Portanto, o conjunto $\beta = \{1 - t^3, (1-t)^2, 1 - t, 1\}$ é linearmente independente e como $dim(\mathcal{P}_3) = 4$, β é uma base para $\mathcal{P}_3$ e β gera o espaço vetorial.

10) Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^3$, gerado por $(1,0,0)$ e W o subespaço gerado por$(1,1,0)$ e $(0,1,1)$ Mostre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$

Solução 1

i. $U \cap W = \{(0,0,0)\}$. De fato,
$$a(1,0,0) = b(1,1,0) + c(0,1,1)$$
$$a(1,0,0) - b(1,1,0) - c(0,1,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$
Portanto, $U \cap W = \{(0,0,0)\}$.

ii. $a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(0,1,1) = (x,y,z) \Leftrightarrow a = x - y + z, b = y - z$ e $c = z$.
Logo, $\underbrace{(x-y+z)(1,0,0)}_{\in U} + \underbrace{(y-x)(1,1,0) + z(0,1,1)}_{\in W} = (x,y,z)$.
Portanto, $\mathbb{R}^3 = U + W$

Portanto, $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

Solução 2

i. Análogo ao item i. da solução 1.

ii. Pelo item i. temos que a $dim(U \cap W) = 0$ e, assim, pelo teorema da dimensão segue que $dim(U + W) = dimU + dimW = 1 + 2 = 3 \Rightarrow U + W = \mathbb{R}^3$.

Portanto, $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

11) Sejam $W_1 = \{(x,y,z,t) : x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$ e
$W_2 = \{(x,y,z,t) : x - y - z + t = 0\}$

(a) Determine $W_1 \cap W_2$ e exiba uma base.

Solução

resolvemos o sistema:
$$\begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ x + y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$
que é equivalente a
$$\begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ 2y + z - t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$
Que tem posto 3 e nulidade 1. Por tanto, a dimensão de $W_1 \cap W_2$ é 1, que é o número de variáveis livres no sistema.
Portanto, os elementos de $W_1 \cap W_2$ são da forma $(0,0,z,z) = z(0,0,1,1)$ e, assim, $\beta = \{(0,0,1,1)\}$ é uma base para $W_1 \cap W_2$.

(b) Determine $W_1 + W_2$.

Solução 1

Vamos encontrar as bases de W_1 e W_2. Os elementos em W_1 são da forma:
$(x,-x,z,z) = (x,-x,0,0) + (0,0,z,z) = x(1,-1,0,0) + z(0,0,1,1)$.
Portanto, $\beta_1 = \{(1,-1,0,0),(0,0,1,1)\}$ é uma base de W_1.
Os elementos em W_2 são da forma:
$(x,y,z,-x+y+z) = (x,0,0,-x) + (0,y,0,y) + (0,0,z,z) = x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,1) + z(0,0,1,1)$.
Portanto, $\beta_2 = \{(1,0,0,-1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$ é uma base de W_2.
Sabemos que $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ gera $W_1 + W_2$, isto é, $[\beta] = W_1 + W_2$.
Além disso, $\beta = \{(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,-1),(0,1,0,1)\}$ é linearmente independente e, assim, uma base de $W_1 + W_2$. Uma vez que β é linearmente independente e a $dim\mathbb{R}^4 = 4$, segue que β é também uma base de $\mathbb{R}^4$, ou seja, $[\beta] = \mathbb{R}^4$.
Portanto, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$.

Solução 2

Pelo item (a) temos que a $dim(W_1 \cap W_2) = 1$ e, assim, pelo teorema da dimensão segue que $dim(W_1 + W_2) = dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 3 - 1 = 4 \Rightarrow W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$.

(c) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.

Solução

Não, pois $W_1 \cap W_2 \neq \{(0,0,0)\}$.

(d) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$?

Solução

Sim, pelo item (b).

12) (a) Dado o subespaço $V_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + z = 0\right\}$ ache um subespaço V_2 tal que $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.

Solução

Os elementos de V_1 são da forma $(x, y, -x-2y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-2)$ e, assim, $V_1 = [\{(1,0,-1),(0,1,-2)\}]$ e $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,-2)\}$ é base para V_1.

Agora tome $V_2 = [\{(1,0,0)\}]$, então

i. $V_1 \cap V_2 = \{(0,0,0)\}$. De fato,

$$a(1,0,-1) + b(0,1,-2) - c(1,0,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Portanto, $V_1 \cap V_2 = \{(0,0,0)\}$,

ii. $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2$. De fato,

$a(1,0,-1) + b(0,1,-2) + c(1,0,0) = (x,y,z) \Rightarrow a = -2y - z, b = y$ e $c = x + 2y + z$.

Assim,

$\underbrace{(-2y-z)(1,0,-1) + y(0,1,-2)}_{\in V_1} + \underbrace{(x+2y+z)(1,0,0)}_{\in V_2} = (x,y,z)$.

Portanto, $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2$.

Portanto, $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.

Observações

Na resolução do exercício foi utilizado o teorema da dimensão para calcular a $dim V_2$, ou seja, $3 = dim\mathbb{R}^3 = dim V_1 + dim V_2 - dim(V_1 \cap V_2) = 2 + dim V_2 - 0 \Rightarrow dim V_2 = 1$.

Uma vez que a $dim V_2 = 1$, escolhemos uma reta que não está contida no plano $x + 2y + z = 0$, isto é, $V_2 = [\{(1,0,0)\}]$.

(b) Dê exemplos de dois subespaços de dimensão dois de $\mathbb{R}^3$ tais que $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$. A soma é direta?

Solução

Tome $V_1 = [\{(1,0,0),(0,1,0)\}]$ e $V_2 = [\{(0,0,1),(1,1,1)\}]$. Temos que $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$. No entanto, $V_1 + V_2$ não é soma direta, pois de $dim(V_1 + V_2) = dim(V_1) + dim(V_2) - dim(V_1 \cap V_2)$, segue que $3 = 2 + 2 - dim(V_1 \cap V_2) \Rightarrow dim(V_1 \cap V_2) = 1$.