Álgebra Linear - 2019.1

Lista 4 - Produto interno

1) Mostre que $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$ é um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Solução

Sejam $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ e $z = (z_1, z_2, z_3)$ em $\mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que satisfaz os seguintes quatro axiomas:

(A1) $\langle x + y, z\rangle = \langle (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3),(z_1, z_2, z_3)\rangle = \langle (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),(z_1, z_2, z_3)\rangle$ $= 2(x_1 + y_1)z_1 + 3(x_2 + y_2)z_2 + (x_3 + y_3)z_3 = 2x_1z_1 + 2y_1z_1 + 3x_2z_2 + 3y_2z_2 + x_3z_3 + y_3z_3 = (2x_1z_1 + 3x_2z_2 + x_3z_3) + (2y_1z_1 + 3y_2z_2 + y_3z_3) = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

(A2) $\langle \lambda x, y\rangle = \langle \lambda(x_1, x_2, x_3),(y_1, y_2, y_3)\rangle = \langle (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3),(y_1, y_2, y_3)\rangle = 2\lambda x_1y_1+3\lambda x_2y_2+\lambda x_3y_3 = \lambda(2x_1y_1+3x_2y_2+x_3y_3) = \lambda \langle x, y\rangle$.

(A3) $\langle x, y\rangle = \langle (x_1, x_2, x_3),(y_1, y_2, y_3)\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 = 2y_1x_1 + 3y_2x_2 + y_3x_3 = \langle y, x\rangle$.

(A4) $\langle x, x\rangle = \langle (x_1, x_2, x_3),(x_1, x_2, x_3)\rangle = 2x_1x_1 + 3x_2x_2 + x_3x_3 = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 > 0$ se $x \neq (0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.
$\langle x, x\rangle = 0 \iff 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 = 0 \iff x_1 = x_2 = x_3 = 0 \iff x = (0, 0, 0)$

Portanto, $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$ é um produto interno de $\mathbb{R}^3$.

2) Dado $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Determine se $\langle x, y\rangle$ é um produto interno ou não. E se não for que axiomas falham.

(a) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i$
(b) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i$
(c) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i |y_i|$
(d) $\langle x, y\rangle = |\sum_{i=1}^n x_iy_i|$

Solução

Sejam $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ e $z = (z_1, ..., z_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_iy_i$ é um produto interno em $\mathbb{R}^n$. De fato, vamos mostrar que satisfaz os seguintes quatro axiomas:

(A1) $\langle x + y, z\rangle = \langle (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n),(z_1, ..., z_n)\rangle = \langle (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n),(z_1, ..., z_n)\rangle$
$$= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)z_i = \sum_{i=1}^n (x_iz_i + y_iz_i) = \sum_{i=1}^n x_iz_i + \sum_{i=1}^n y_iz_i = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.$$

(A2) $\langle \lambda x, y\rangle = \langle \lambda(x_1, ..., x_n),(y_1, ..., y_n)\rangle = \langle (\lambda x_1, ..., \lambda x_n),(y_1, ..., y_n)\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda x_iy_i$
$$= \lambda \sum_{i=1}^n x_iy_i = \lambda \langle x, y\rangle.$$

(A3) $\langle x, y\rangle = \langle (x_1, ..., x_n),(y_1, ..., y_n)\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_iy_i = \sum_{i=1}^n y_ix_i = \langle y, x\rangle$.

(A4) $\langle x, x\rangle = \langle (x_1, ..., x_n),(x_1, ..., x_n)\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_ix_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ se $x \neq (0, ..., 0)$ de $\mathbb{R}^n$.
$$\langle x, x\rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \iff x_i = 0, i = 1, .., n \iff x = (0, 0, .., 0)$$

Portanto, $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_iy_i$ é um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

(b) $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i$ não é um produto interno em $\mathbb{R}^n$, pois satisfaz os axiomas $(A1)$, $(A2)$ e $(A3)$ e falha o axioma $(A4)$. De fato:

(A1) $\langle x+y,z\rangle = \langle (x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n),(z_1,...,z_n)\rangle = \langle (x_1+y_1,...,x_n+y_n),(z_1,...,z_n)\rangle$
$= \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} z_i = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle.$

(A2) $\langle \lambda x,y\rangle = \langle \lambda(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\rangle = \langle (\lambda x_1,...,\lambda x_n),(y_1,...,y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\lambda x_i\sum_{i=1}^{n} y_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i\sum_{i=1}^{n} y_i = \lambda\langle x,y\rangle.$

(A3) $\langle x,y\rangle = \langle (x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i\sum_{i=1}^{n} x_i = \langle y,x\rangle.$

(A4) Seja $x=(1,-1,0,...,0)\in\mathbb{R}^n$, então
$\langle x,x\rangle = \langle (1,-1,0,...,0),(1,-1,...,0)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i 0 = 0$ e, assim, $\langle x,x\rangle = 0$ sem que $x=(0,...,0)$ de $\mathbb{R}^n$.

Portanto, $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\sum_{i=1}^{n} y_i$ não é um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

(c) $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\,|y_i|$ não é um produto interno em $\mathbb{R}^n$, pois satisfaz os axiomas $(A1)$ e $(A2)$ e falha os axiomas $(A3)$ e $(A4)$. De fato:

(A1) $\langle x+y,z\rangle = \langle (x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n),(z_1,...,z_n)\rangle = \langle (x_1+y_1,...,x_n+y_n),(z_1,...,z_n)\rangle$
$= \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)|z_i| = \sum_{i=1}^{n}(x_i|z_i|+y_i|z_i|) = \sum_{i=1}^{n} x_i|z_i| + \sum_{i=1}^{n} y_i|z_i| = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle.$

(A2) $\langle \lambda x,y\rangle = \langle \lambda(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\rangle = \langle (\lambda x_1,...,\lambda x_n),(y_1,...,y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\lambda x_i|y_i| =$
$= \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i|y_i| = \lambda\langle x,y\rangle.$

(A3) Tome $x=(-1,0,...,0)$ e $y=(1,0,...,0)$ em $\mathbb{R}^n$, então
$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i|y_i| = -1 \neq 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i|x_i| = \langle y,x\rangle.$

(A4) Tome $x=(-1,0,...,0)\in\mathbb{R}^n$, então
$\langle x,x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i|x_i| = -1 < 0.$

Portanto, $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i|y_i|$ não é um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

(d) $\langle x,y\rangle = \left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right|$ não é um produto interno em $\mathbb{R}^n$, pois falham os axiomas $(A1)$ e $(A2)$ e satifaz os axiomas $(A3)$ e $(A4)$. De fato:

(A1) Tome $x=z=(1,0,...,0)$ e $y=(-1,0,...,0)$ em $\mathbb{R}^n$, então
$\langle x+y,z\rangle = \langle (1,0,...,0)+(-1,0,...,0),(1,0,...,0)\rangle = \langle (0,0,...,0),(1,0,...,0)\rangle =$
$= \left|\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)z_i\right| = 0.$
Por outro lado,
$\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle = \langle (1,0,...,0),(1,0,...,0)\rangle + \langle (-1,0,...,0),(1,0,...,0)\rangle = \left|\sum_{i=1}^{n} x_iz_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} y_iz_i\right| = 1+1 = 2.$
Portanto, $\langle x+y,z\rangle \neq \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$.

(A2) Tome $x=y=(1,0,...,0)$ e $\lambda=-1\in\mathbb{R}$, então
$\langle \lambda x,y\rangle = \langle (-1)(1,0,...,0),(1,0,...,0)\rangle = \langle (-1,0,...,0),(1,0,...,0)\rangle = \left|\sum_{i=1}^{n}\lambda x_iy_i\right| = 1 \neq -1 = \lambda\left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| = \lambda\langle x,y\rangle.$

(A3) $\langle x,y\rangle = \langle (x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\rangle = \left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} y_ix_i\right| = \langle y,x\rangle.$

(A4) $\langle x, x\rangle = \langle (x_1, ..., x_n), (x_1, ..., x_n)\rangle = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right| > 0$ se $x \neq (0, ..., 0)$ de $\mathbb{R}^n$.

Portanto, $\langle x, y\rangle = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|$ não é um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

3) Em $\mathbb{R}^4$ determine se $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$ é um produto interno.

<u>**Solução**</u>

Note que $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$ não é um produto interno em $\mathbb{R}^4$, pois falha o axioma $(A4)$. De fato, tome $x = (0, 0, 0, 1)$, então

$\langle x, x\rangle = \langle (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\rangle = -1 < 0.$

4) Em $\mathbb{R}^2$ determine se $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$ é um produto interno

<u>**Solução**</u>

$\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$. De fato, sejam $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ e $z = (z_1, z_2)$ em $\mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que satisfaz os seguintes quatro axiomas:

(A1) $\langle x + y, z\rangle = \langle (x_1, x_2) + (y_1, y_2), (z_1, z_2)\rangle = \langle (x_1 + y_1, x_2 + y_2), (z_1, z_2)\rangle = 2(x_1+y_1)z_1+2(x_2+y_2)z_2-(x_1+y_1)z_2-(x_2+y_2)z_1 = 2x_1z_1+2y_1z_1+2x_2z_2+2y_2z_2-x_1z_2-y_1z_2-x_2z_1-y_2z_1 = (2x_1z_1+2x_2z_2-x_1z_2-x_2z_1)+(2y_1z_1+2y_2z_2-y_1z_2-y_2z_1) = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

(A2) $\langle \lambda x, y\rangle = \langle \lambda(x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = \langle (\lambda x_1, \lambda x_2), (y_1, y_2)\rangle = 2\lambda x_1y_1 + 2\lambda x_2y_2 - \lambda x_1y_2 - \lambda x_2y_1 = \lambda(2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1) = \lambda \langle x, y\rangle$.

(A3) $\langle x, y\rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 = 2y_1x_1 + 2y_2x_2 - y_1x_2 - y_2x_1 = \langle y, x\rangle$.

(A4) $\langle x, x\rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2)\rangle = 2x_1x_1 + 2x_2x_2 - x_1x_2 - x_2x_1 = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 > 0$ se $x \neq (0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$, pois para qualquer valor de $x_2 = a \neq 0$, temos

$x_1^2 + a^2 - ax_1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - ax_1 + a^2 = 0$ e, assim, como $\Delta = a^2 - 4a^2 = -3a^2 < 0$ não temos raízes reais. Além disso, como o coeficiente de $x_1^2 = 1 > 0$ segue que $x_1^2 - ax_1 + a^2 > 0$ sempre.

Portanto, $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$ é um produto interno de $\mathbb{R}^2$.

5) Mostre que as seguintes funções bilineares são produtos internos definidos no epaço vetorial V:

(a) V é o espaço das funções contínuas reais no intervalo $[-1, 1]$,
$\langle f_1, f_2\rangle = \int_{-1}^{1} f_1(x)f_2(x)dx$, para $f_1, f_2 \in V$.

<u>**Solução**</u>

Sejam f_1, f_2 e f_3 em V e $\lambda \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que satisfaz os seguintes quatro axiomas:

(A1) $\langle f_1 + f_2, f_3\rangle = \int_{-1}^{1} (f_1(x) + f_2(x))\, f_3(x)dx = \int_{-1}^{1} f_1(x)f_3(x)dx + \int_{-1}^{1} f_2(x)f_3(x)dx = \langle f_1, f_3\rangle + \langle f_2, f_3\rangle$.

(A2) $\langle \lambda f_1, f_2\rangle = \int_{-1}^{1} \lambda f_1(x)f_2(x)dx = \lambda \int_{-1}^{1} f_1(x)f_2(x)dx = \lambda \langle f_1, f_2\rangle$.

(A3) $\langle f_1, f_2\rangle = \int_{-1}^{1} f_1(x)f_2(x)dx = \int_{-1}^{1} f_2(x)f_1(x)dx = \langle f_2, f_1\rangle$.

(A4) $\langle f_1, f_1\rangle = \int_{-1}^{1} f_1(x)f_1(x)dx = \int_{-1}^{1} (f_1(x))^2\, dx > 0$ se $f_1 \neq 0$ de V.

$\langle f_1, f_1\rangle = 0 \Longleftrightarrow \int_{-1}^{1} (f_1(x))^2\, dx = 0 \Longleftrightarrow f_1 = 0$

Portanto, $\int_{-1}^{1} f_1(x)f_2(x)dx$ é um produto interno em V.

(b) $V = M(2, 2)$, $\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$, para $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ em V .

<u>**Solução**</u>

Sejam $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$ em V e $\lambda \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que satisfaz os seguintes quatro axiomas:

(A1) $\langle A+B, C\rangle = (a_{11}+b_{11})c_{11} + (a_{12}+b_{12})c_{12} + (a_{21}+b_{21})c_{21} + (a_{22}+b_{22})c_{22} = a_{11}c_{11} + b_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + b_{12}c_{12} + a_{21}c_{21} + b_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + b_{22}c_{22} = (a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22}) + (b_{11}c_{11} + b_{12}c_{12} + b_{12}c_{12} + b_{12}c_{12} + b_{21}c_{21} + b_{22}c_{22}) = \langle A, C\rangle = \langle B, C\rangle$.

(A2) $\langle \lambda A, B\rangle = \lambda a_{11}b_{11} + \lambda a_{12}b_{12} + \lambda a_{21}b_{21} + \lambda a_{22}b_{22} = \lambda(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}) = \lambda \langle A, B\rangle$.

(A3) $\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{12} + b_{21}a_{21} + b_{22}a_{22} = \langle B, A\rangle$.

(A4) $\langle A, A\rangle = a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} + a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 > 0$ se $A \neq [0_{ij}]$ de V.
$\langle A, A\rangle = 0 \iff a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 = 0 \iff a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0 \iff A = 0$.

Portanto, $\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$ é um produto interno em V.

6) Dado um espaço vetorial V com produto interno $\langle\ ,\rangle$, mostre a desigualdade de Schwartz $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$ para qualquer $u, v \in V$. Usando a desigualdade de Schwartz, mostre a desigualdade triangular $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Prova - Desigualdade de Schwartz.

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u, v \in V$, temos:

$0 \leq \langle \alpha u - v, \alpha u - v\rangle = \langle \alpha u, \alpha u - v\rangle + \langle -v, \alpha u - v\rangle = \langle \alpha u, \alpha u\rangle + \langle \alpha u, -v\rangle + \langle -v, \alpha u\rangle + \langle -v, -v\rangle = \alpha^2 \langle u, u\rangle - \alpha \langle u, v\rangle - \alpha \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = \alpha^2 \|u\|^2 - 2\alpha \langle u, v\rangle + \|v\|^2$.

Daí, segue que

$0 \leq \langle \alpha u - v, \alpha u - v\rangle = \alpha^2 \|u\| - 2\alpha \langle u, v\rangle + \|v\|^2$.

Note que $\alpha^2 \|u\|^2 - 2\alpha \langle u, v\rangle + \|v\|^2$ é uma equação do segundo grau em α que para ser não-negativa é preciso que:

$\Delta = 4\langle u, v\rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow 4\left(\langle u, v\rangle^2 - \|u\|^2\|v\|^2\right) \leq 0 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle^2 \leq (\|u\|\,\|v\|)^2 \Rightarrow |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$.

Portanto, $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$.

Prova - Desigualdade triangular.

Para u, v linearmente independentes em V, teremos:

$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + \|v\|^2 \underbrace{\leq}_{DS} \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$.

Daí, segue que

$0 \leq \|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 \Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Portanto, $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

7) Sejam os vetores de $\mathbb{R}^3$, $u = (1,1,1), v_1 = (1,-1,3), v_2 = (0,2,2)$ e $v_3 = (1,2,3)$. Considere o produto escalar como produto interno em $\mathbb{R}^3$.

(a) Descubra qual dos vetores v_i tem o menor ângulo em relação a u.

Solução

Temos que $\|u\| = \sqrt{3}$, $\|v_1\| = \sqrt{11}$, $\|v_2\| = \sqrt{8}$ e $\|v_3\| = 14$, então

$$cos\theta = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|u\|\,\|v_1\|} = \frac{\langle (1,1,1), (1,-1,3)\rangle}{\sqrt{3}\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{33}}.$$
$$cos\theta = \frac{\langle u, v_2\rangle}{\|u\|\,\|v_2\|} = \frac{\langle (1,1,1), (0,2,2)\rangle}{\sqrt{3}\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$
$$cos\theta = \frac{\langle u, v_3\rangle}{\|u\|\,\|v_3\|} = \frac{\langle (1,1,1), (1,2,3)\rangle}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{42}}.$$

Sabemos que quanto menor for o ângulo entre os vetores maior é o valor do $cos\theta$.

Portanto, o vetor v_3 tem o menor ângulo em relação ao vetor u.

(b) Descubra qual dos vetores v_i tem a menor distância em relação a u.

Solução

Para descobrir qual dos vetores v_i tem a menor distância em relação a u, calculemos

$\|u - v_1\| = \sqrt{(1-1)^2 + (1+1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8}$,

$\|u - v_2\| = \sqrt{(1-0)^2 + (1-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$,

$\|u - v_3\| = \sqrt{(1-1)^2 + (1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$.

Portanto o vetor v_2 tem a menor distância em relação a u.

8) Sejam as matrizes (vetores) de $M(2,2)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Considere o produto interno do exe.(5b).

(a) Descubra qual dos vetores B ou C tem o menor ângulo em relação a A.

Solução

Temos que $\|A\| = \sqrt{3}$, $\|B\| = \sqrt{3}$ e $\|C\| = \sqrt{14}$, então

$$cos\theta = \frac{\langle A, B\rangle}{\|A\|\,\|B\|} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3},$$

$$cos\theta = \frac{\langle A, C\rangle}{\|A\|\,\|C\|} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{42}}.$$

Sabemos que quanto menor for o ângulo entre os vetores maior é o valor do $cos\theta$.

Portanto, o vetor C tem o menor ângulo em relação ao vetor A.

(b) Descubra qual dos vetores B ou C tem a menor distância em relação a A.

Temos que $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e

$A - C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, então

$$\|A - B\| = \sqrt{\langle A - B, A - B\rangle} = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\|A - C\| = \sqrt{\langle A - C, A - C\rangle} = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{5}.$$

Portanto, o vetor B tem a menor distância em relação a A.

9) Sendo $\beta = \{(1,2),(2,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$, use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para achar uma base ortonormal β' em relação ao produto interno usual.

Solução

Denotemos $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (2,1)$. Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt vamos achar uma base ortonormal β' de $\mathbb{R}^2$. Para tal, tome

$w_1 = v_1 = (1,2)$ e

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (2,1) - \frac{\langle (2,1),(1,2)\rangle}{\|(1,2)\|^2}(1,2) = (2,1) - \frac{4}{5}(1,2) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

Portanto, $\beta' = \left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|} \right\} = \left\{ \frac{(1,2)}{\|(1,2)\|}, \frac{\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)}{\left\|\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)\right\|} \right\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \right\}$.

10) Sendo $\beta = \{(1,1,1),(0,2,1),(0,0,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para achar uma base ortonormal β' em relação ao produto interno usual. [Mantenha a ordem original dos vetores de β de forma que o primeiro vetor de β' seja proporcional a (1, 1, 1).]

Solução

Denotemos $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,2,1)$ e $v_3 = (0,0,1)$. Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt vamos achar uma base ortonormal β' de $\mathbb{R}^3$. Para tal, tome

$w_1 = v_1 = (1,1,1)$.

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (0,2,1) - \frac{\langle (0,2,1),(1,1,1)\rangle}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) = (0,2,1) - (1,1,1) = (-1,1,0).$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2 = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(1,1,1)\rangle}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1)$$
$$-\frac{\langle (0,0,1),(-1,1,0)\rangle}{\|(-1,1,0)\|^2}(-1,1,0) = (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Portanto, $\beta' = \left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|}\right\} = \left\{\frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|}, \frac{(-1,1,0)}{\|(-1,1,0)\|}, \frac{\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right\|}\right\} =$
$\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{2\sqrt{6}}{6}\right)\right\}.$

11) Em P_2 considere o produto interno de (5a). A partir da base canônica $\xi = \{1, t, t^2\}$, encontre uma base ortogonal utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Solução

Denotemos $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$ e $f_3(t) = t^2$, então

$\|f_1\|^2 = \langle f_1, f_1\rangle = \langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} 1dt = [t]_{-1}^{1} = 1 + 1 = 2.$

$\|f_2\|^2 = \langle f_2, f_2\rangle = \langle t, t\rangle = \int_{-1}^{1} t^2dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$

Agora, para encontrar uma base ortogonal utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, considere $g_1(t) = f_1(t) = 1.$

$$g_2(t) = f_2(t) - \frac{\langle f_2(t), g_1(t)\rangle}{\|g_1(t)\|^2}g_1(t) = t - \frac{\langle t, 1\rangle}{\|1\|^2}1 = t - \frac{\int_{-1}^{1} tdt}{2} = t - \frac{\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1}}{2} = t - \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{2} = t.$$

$$g_3(t) = f_3(t) - \frac{\langle f_3(t), g_1(t)\rangle}{\|g_1(t)\|^2}g_1 - \frac{\langle f_3(t), g_2(t)\rangle}{\|g_2(t)\|^2}g_2(t) = t^2 - \frac{\langle t^2, 1\rangle}{\|1\|^2}1 - \frac{\langle t^2, t\rangle}{\|t\|^2}t = t^2 - \frac{\int_{-1}^{1} t^2dt}{2} - \frac{\int_{-1}^{1} t^3dt}{\frac{2}{3}}t = t^2 - \frac{\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}}{2} -$$
$$\frac{\left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{1}}{\frac{2}{3}}t = t^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2} - \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}t = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Portanto, $\beta = \{g_1(t), g_2(t), g_3(t)\} = \left\{1, t, t^2 - \frac{1}{3}\right\}$ é a base ortogonal procurada.

12) Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(1,0,1), (1,1,0), (2,1,1)\}$.

(a) Encontre $S^\perp$ e verifique que ele é um subespaço vetorial de V.

Solução

Chamamos de ortogonal a S ao conjunto $S^\perp = \{v \in V : \langle v, u\rangle = 0, \forall u \in S\}$.
Seja $v = (x, y, z) \in V$, então

$$\begin{cases} \langle (x,y,z), (1,0,1)\rangle = 0 \\ \langle (x,y,z), (1,1,0)\rangle = 0 \\ \langle (x,y,z), (2,1,1)\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \\ z = z \end{cases}.$$

Portanto, $S^\perp = \{(x, y, z) \in V : x = -z, y = z, z \in \mathbb{R}\}$.
O conjunto $S^\perp$ é um subespaço vetorial de V, mesmo que S não tenha a estrutura de espaço vetorial. De fato,

i. $(0,0,0) \in S^\perp$, pois basta tomar $z = 0$ e $\langle (0,0,0), u\rangle = 0, \forall u \in S$.

ii. Se $v_1, v_2 \in S^\perp$, então $\langle v_1, u\rangle = \langle v_2, u\rangle = 0$, $\forall u \in S$.
Portanto, temos $\langle v_1 + v_2, u\rangle = \langle v_1, u\rangle + \langle v_2, u\rangle = 0 + 0 = 0$, $\forall u \in S$ e, então $v_1 + v_2 \in S^\perp$.

iii. Se $v_1 \in S^\perp$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\langle v_1, u\rangle = 0$, $\forall u \in S$.
Portanto, temos $\langle \lambda v_1, u\rangle = \lambda \langle v_1, u\rangle = \lambda 0 = 0$, $\forall u \in S$ e, então $\lambda v_1 \in S^\perp$.

(b) Encontre uma base ortogonal para $S^{\perp}$.

Solução

Os vetores em $S^{\perp}$ são da forma $(-z,z,z) = z(-1,1,1)$ e, assim, $\beta = \{(-1,1,1)\}$ é uma base ortogonal para $S^{\perp}$.

(c) Se S fosse $[(1,0,1),(1,1,0),(2,1,1)]$, qual seria $S^{\perp}$? Encontre bases ortogonais para S e $S^{\perp}$ nesse caso.

Solução

O conjunto $S^{\perp}$ é mesmo que foi definido no item (a), pois basta definir no conjunto de geradores. Também, a base ortogonal de $S^{\perp}$ é a mesma do item (b).

Resta encontrar uma base ortogonal para S.

Primeiramente, note que $(1,0,1)+(1,1,0) = (2,1,1)$ e, assim, podemos descartar o vetor $(2,1,1)$. Dessa forma, $S = [\{(1,0,1),(1,1,0)\}]$ e $\chi = \{(1,0,1),(1,1,0)\}$ é uma base para S.

Agora, denotemos $u_1 = (1,0,1)$ e $u_2 = (1,1,0)$, tome então

$v_1 = u_1 = (1,0,1)$.

$v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (1,1,0) - \dfrac{\langle (1,1,0),(1,0,1)\rangle}{\|(1,0,1)\|^2}(1,0,1) = (1,1,0) - \dfrac{1}{2}(1,0,1) = \left(\dfrac{1}{2}, 1, -\dfrac{1}{2}\right).$

Portanto, $\rho = \left\{(1,0,1), \left(\dfrac{1}{2},1,-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$ é uma base ortogonal de S.

13) Sendo $v = (1,2,3)$, utilize o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$ e encontre as coordenadas $[v]_{\beta}$ e $[v]_{\beta'}$ em relação às bases β e $\beta^{'}$ do exe. 10.[Qual a vantagem de ter uma base ortonormal?].

Solução

Para encontrar as coordenadas de $[v]_{\beta}$, escrevemos

$a(1,1,1) + b(0,2,1) + c(0,0,1) = (1,2,3) = v$ e, calculemos

$6 = \langle (1,2,3),(1,1,1)\rangle = \langle a(1,1,1) + b(0,2,1) + c(0,0,1),(1,1,1)\rangle =$

$= a\,\langle (1,1,1),(1,1,1)\rangle + b\,\langle (0,2,1),(1,1,1)\rangle + c\,\langle (0,0,1),(1,1,1)\rangle = 3a + 3b + c.$

$7 = \langle (1,2,3),(0,2,1)\rangle = \langle a(1,1,1) + b(0,2,1) + c(0,0,1),(0,2,1)\rangle =$

$= a\,\langle (1,1,1),(0,2,1)\rangle + b\,\langle (0,2,1),(0,2,1)\rangle + c\,\langle (0,0,1),(0,2,1)\rangle = 3a + 5b + c.$

$3 = \langle (1,2,3),(0,0,1)\rangle = \langle a(1,1,1) + b(0,2,1) + c(0,0,1),(0,0,1)\rangle =$

$= a\,\langle (1,1,1),(0,0,1)\rangle + b\,\langle (0,2,1),(0,0,1)\rangle + c\,\langle (0,0,1),(0,0,1)\rangle = a + b + c.$

Daí, temos

$$\begin{cases} 3a+3b+c = 6 \\ 3a+5b+c = 7 \\ a+b+c = 3 \end{cases}.$$

Cuja solução é: $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ e $c = \frac{3}{2}$.

Portanto, $[v]_{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Agora, como $\beta^{'}$ é uma base ortonormal podemos escrever

$v = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \langle v, v_k\rangle\, v_k$, v_k vetores da base $\beta^{'}$.

Logo, as coordenadas $[v]_{\beta}$ são dadas por:

$\langle v, v_1\rangle = \left\langle (1,2,3), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle = 2\sqrt{3};$

$\langle v, v_2\rangle = \left\langle (1,2,3), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2};$

$\langle v, v_3\rangle = \left\langle (1,2,3), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{2\sqrt{6}}{6}\right)\right\rangle = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

Portanto, $[v]_{\beta} = \left(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

A ventagem que o calculo pode ser feito diretamente, sem resolver um sistema linear.

14) Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual. Seja U o subespaço gerado pelos elementos $\mathbf{u_1} = (1, -1, 1, 1)$ e $\mathbf{u_2} = (1, 2, 0, 1)$.

   a) Determine uma base para o subespaço $U^\perp$.

   b) Escreva o vetor $(2, 1, 1, -1)$ como uma soma de dois vetores, sendo um deles pertencente a U e o outro pertencente a $U^\perp$.

   Solução

a) Mostre que os vetores de $U^\perp$ tem a forma $(a, b, 3b, -a - 2b)$ e conclua que $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 3, -2)\}$ é base de $U^\perp$;

b) **Solução 1** Ortonormalize as bases de U e $U^\perp$ e assim obtenha uma base ortonormal para o espaço todo. Decomponha o vetor dado nessa base obtida. Resposta: $(2, 1, 1, -1) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{7}{4}\right)$, onde o primeiro vetor pertence a U e o segundo a $U^\perp$.

   Solução 2 Se não quiser achar as bases ortonormais, pode ser feito na forma usual escrevendo o vetor $(2, 1, 1, -1)$ como uma combinação linear das bases e resolvendo um sistema de equações. Como a projeção ortogonal é única o resultado será o mesmo.

   $(2, 1, 1, -1) = \underbrace{a(1, -1, 1, 1) + b(1, 2, 0, 1)}_{\in U} + \underbrace{c(1, 0, 0, -1) + d(0, 1, 3, -2)}_{\in U^\perp}.$

   Resolvendo o sistema linear obtem-se: $a = 1/4, b = 1/2, c = 5/4$ e $d = 1/4$. Então,

   $a(1, -1, 1, 1) + b(1, 2, 0, 1) = (1/4)(1, -1, 1, 1) + (1/2)(1, 2, 0, 1) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ e $c(1, 0, 0, -1) + d(0, 1, 3, -2) = (5/4)(1, 0, 0, -1) + (1/4)(0, 1, 3, -2) = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{7}{4}\right)$.

   Na **solução 1** é mais facíl calcular os coeficientes dado que a base é ortonormal. Como no exercício anterior (ex. 13), quando a base é ortonormal, não é necessário resolver um sistema linear.