Álgebra Linear - 2019.1

Lista 5- Transformações Lineares

1) Quais das transformações abaixo são lineares?

(a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (z, 2^y, 2^z)$.

Solução

T não é transformação linear, pois $T(0, 0, 0) = \left(0, 2^0, 2^0\right) = (0, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (3x, 2, 5z)$.

Solução

T não é transformação linear, pois $T(0, 0, 0) = (0, 2, 0) \neq (0, 0, 0)$.

(c) $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z, w) = (x - w, y - w, x + z)$.

Solução

Sejam $u = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2, w_2)$ em $\mathbb{R}^4$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $$\begin{aligned} T(u + v) &= T((x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2)) \\ &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2) \\ &= (x_1 + x_2 - (w_1 + w_2), y_1 + y_2 - (w_1 + w_2), x_1 + x_2 + z_1 + z_2) \\ &= (x_1 - w_1, y_1 - w_1, x_1 + z_1) + (x_2 - w_2, y_2 - w_2, x_2 + z_2) \\ &= T(u) + T(v). \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} T(\alpha u) &= T\left(\alpha(x_1, y_1, z_1, w_1)\right) \\ &= T\left(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1, \alpha w_1\right) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha w_1, \alpha y_1 - \alpha w_1, \alpha x_1 + \alpha z_1) \\ &= (\alpha(x_1 + w_1), \alpha(y_1 - w_1), \alpha(x_1 + z_1)) \\ &= \alpha(x_1 + w_1, y_1 - w_1, x_1 + z_1) \\ &= \alpha T(u). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

(d) $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n, T(A) = (A_{11}, A_{22}, ..., A_{nn})$.

Solução

Sejam $A = \begin{bmatrix} A_{11} & ... & A_{1n} \\ \vdots & ... & \vdots \\ A_{1n} & ... & A_{nn} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} B_{11} & ... & B_{1n} \\ \vdots & ... & \vdots \\ B_{1n} & ... & B_{nn} \end{bmatrix}$ em $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $$\begin{aligned} T(A + B) &= T\left(\begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & ... & A_{1n} + B_{1n} \\ \vdots & ... & \vdots \\ A_{n1} + B_{n1} & ... & A_{nn} + B_{nn} \end{bmatrix}\right) \\ &= (A_{11} + B_{11}, ..., A_{nn} + B_{nn}) \\ &= (A_{11}, ..., A_{nn}) + (B_{11}, ..., B_{nn}) \\ &= T(A) + T(B). \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} T(\alpha A) &= T\left(\begin{bmatrix} \alpha A_{11} & ... & \alpha A_{1n} \\ \vdots & ... & \vdots \\ \alpha A_{n1} & ... & \alpha A_{nn} \end{bmatrix}\right) \\ &= (\alpha A_{11}, ..., \alpha A_{nn}) \\ &= \alpha\left(A_{11}, ..., A_{nn}\right) \\ &= \alpha T\left(A\right). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

(e) $T: C^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R}), T(f) = 3f^{''} - 2f^{'} + 1.$

Solução

T não é transformação linear, pois para $f \equiv 0$ em $C^2(\mathbb{R})$, $T(0) = 1 \neq 0 \equiv f$ em $C(\mathbb{R})$.

(f) $T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, T(A) = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}.$

Solução

T não é transformação linear. De fato, seja $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} T(\alpha A) &= T\left(\begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} \end{bmatrix}\right) \\ &= \alpha^2 A_{11}A_{22} - \alpha^2 A_{21}A_{12} \\ &= \alpha^2 (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}) \\ &= \alpha^2 T(A) \\ &\neq \alpha T(A), \forall \alpha \neq \pm 1 \ \ e \ \ A \neq 0_{2\times 2}. \end{aligned}$$

(g) $T: C([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, T(f) = \int\limits_a^b f(x)dx.$

Solução

Sejam $f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $T(f+g) = \int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx = T(f) + T(g).$

ii. $T(\alpha f) = \int\limits_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx = \alpha T(f).$

Portanto, T é uma transformação linear.

(h) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(x,y) = (|x|, 2x+2y).$

Solução

T não é transformação linear. De fato, sejam $u = (1,0) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$T(\alpha u) = T((-1)(1,0)) = T(-1,0) = (|-1|, -2) = (1,-2).$

Por outro lado,

$\alpha T(u) = (-1)T(1,0) = (-1)(|1|, 2) = (-1)(1,2) = (-1,-2).$

Portanto, $T(\alpha u) \neq \alpha T(u)$ e, assim, T não é transformação linear.

(i) $T: P_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = (a_3 + a_2 - a_1, a_0).$

Solução

Sejam $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ e $q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3$ em $P_3(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

i. $$\begin{aligned} T(p+q) &= T\left((a_0+b_0) + (a_1+b_1)t + (a_2+b_2)t^2 + (a_3+b_3)t^3\right) \\ &= ((a_3+b_3) + (a_2+b_2) - (a_1+b_1), a_0+b_0) \\ &= ((a_3+a_2-a_1) + (b_3+b_2-b_1), a_0+b_0) \\ &= (a_3+a_2-a_1, a_0) + (b_3+b_2-b_1, b_0) \\ &= T(p) + T(q). \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} T(\alpha p) &= T\left(\alpha a_0 + \alpha a_1 t + \alpha a_2 t^2 + \alpha a_3 t^3\right) \\ &= (\alpha a_3 + \alpha a_2 - \alpha a_1, \alpha a_0) \\ &= \alpha(a_3 + a_2 - a_1, a_0) \\ &= \alpha T(p). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

(j) $T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(A) = (A_{11} - A_{12}, A_{11} + A_{12}).$

Solução

Sejam $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $T\left(A+B\right) = T\left(\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}\right)$
$= (A_{11}+B_{11}-(A_{12}+B_{12}), A_{11}+B_{11}+A_{12}+B_{12})$
$= (A_{11}-A_{12}, A_{11}+A_{12})+(B_{11}-B_{12}, B_{11}+B_{12})$.

i. $T\left(\alpha A\right) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} \end{bmatrix}\right)$
$= (\alpha A_{11}-\alpha A_{12}, \alpha A_{11}+\alpha A_{12})$
$= \alpha(A_{11}-A_{12}, A_{11}+A_{12})$
$= \alpha T\left(A\right)$.

Portanto, T é uma transformação linear.

(k) $T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(A) = (A_{11}-A_{12}, A_{21}+A_{22}, 2A_{11}-A_{21})$.

Solução

Sejam $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $T\left(A+B\right) = T\left(\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}\right)$
$= (A_{11}+B_{11}-(A_{12}+B_{12}), A_{21}+B_{21}+A_{22}+B_{22}, 2(A_{11}+B_{11})-(A_{21}+B_{21}))$
$= (A_{11}-A_{12}, A_{21}+A_{22}, 2A_{11}-A_{21})+(B_{11}-B_{12}, B_{21}+B_{22}, 2B_{11}-B_{21})$
$= T\left(A\right)+T\left(B\right)$.

i. $T\left(\alpha A\right) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} \end{bmatrix}\right)$
$= (\alpha A_{11}-\alpha A_{12}, \alpha A_{21}+\alpha A_{22}, 2\alpha A_{11}-\alpha A_{21})$
$= \alpha(A_{11}-A_{12}, A_{21}+A_{22}, 2A_{11}-A_{21})$
$= \alpha T\left(A\right)$.

Portanto, T é uma transformação linear.

(l) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(x,y) = (x+y, x-y)$.

Solução

Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $T(u+v) = T\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right)$
$= (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1+x_2-y_1-y_2)$
$= (x_1+y_1, x_1-y_1)+(x_2+y_2, x_2-y_2)$
$= T(u)+T(v)$.

ii. $T(\alpha u) = T\left(\alpha x_1, \alpha y_1\right)$
$= (\alpha x_1+\alpha y_1, \alpha x_1-\alpha y_1)$
$= \alpha(x_1+y_1, x_1-y_1)$
$= \alpha T(u)$.

Portanto, T é uma transformação linear.

(m) $T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, T(A) = det(A)$.

Solução

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, então

$T(A+B) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1$.

Por outro lado,

$T(A)+T(B) = det(A)+det(B) = det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)+det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0+0 = 0$.

Logo, $T(A+B) \neq T(A)+T(B)$.

Portanto, T não é uma transformação linear.

(n) $T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R}), T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

<u>**Solução**</u>

Sejam $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $$\begin{aligned} T(A+B) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (A+B) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= T(A) + T(B). \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} T(\alpha A) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \alpha A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha T(A). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

(o) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, T(x,y) = xy$.

<u>**Solução**</u>

Sejam $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, com $x \neq 0, y \neq 0$ e $\pm 1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, então

$T(\alpha u) = T(\alpha x, \alpha y) = \alpha x \alpha y = \alpha^2 xy \neq \alpha xy = \alpha T(u)$.

Portanto, T não é uma transformação linear.

(p) $T: P_2 \longrightarrow P_3, T(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + c$.

<u>**Solução**</u>

Sejam $p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ e $q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ em P_2 e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $$\begin{aligned} T(p(x) + q(x)) &= T\left((a_1+a_2)x^2 + (b_1+b_2)x + (c_1+c_2)\right) \\ &= (a_1+a_2)x^3 + (b_1+b_2)x^2 + (c_1+c_2) \\ &= (a_1x^3 + b_1x^2 + c_1) + (a_2x^3 + b_2x^2 + c_2) \\ &= T(p(x)) + T(q(x)). \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} T(\alpha p(x)) &= T\left(\alpha a_1 x^2 + \alpha b_1 x + \alpha c_1\right) \\ &= \alpha a_1 x^3 + \alpha b_1 x^2 + \alpha c_1 \\ &= \alpha(a_1x^3 + b_1x^2 + c_1) \\ &= \alpha T(p(x)). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

(q) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow M_{2\times 2}, T(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix}$.

<u>**Solução**</u>

Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $$\begin{aligned} T(u+v) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2) \\ &= \begin{bmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ y_1+y_2 & -x_1-x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & -x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & -x_2 \end{bmatrix} \\ &= T(u) + T(v). \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} T(\alpha u) &= T(\alpha x_1, \alpha x_2) \\ &= \begin{bmatrix} \alpha x_1 & \alpha y_1 \\ \alpha y_1 & -\alpha x_1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & -x_1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha T(u). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

2) Dados os vetores $u_1 = (2,-1), u_2 = (1,1), u_3 = (-1,-4), v_1 = (1,3), v_2 = (2,3), v_3 = (-5,-6)$ decida se existe ou não uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(u_i) = v_i, i = 1,2,3$.

Solução

Sim, existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(u_i) = v_i, i = 1,2,3$. Para determiná-la, escrevemos um vetor genérico de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores u_i

$$a(2,-1) + b(1,1) + c(-1,-4) = (x,y).$$

De onde temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2a + b - c = x \\ -a + b - 4c = y. \end{cases}$$

Cuja solução é $a = \dfrac{x-y}{3} - c$, $b = \dfrac{x+2y}{3} + 3c$, $c \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\left(\frac{x-y}{3} - c\right)(2,-1) + \left(\frac{x+2y}{3} + 3c\right)(1,1) + c(-1,-4) = (x,y).$$

Logo, escolhendo $c = 0$ (mostrar que existe para qualquer c), temos que

$$\frac{x-y}{3}(2,-1) + \frac{x+2y}{3}(1,1) = (x,y).$$

Aplicando a transformação limnear T em ambos os lados da igualdade acima e considerando $T(u_1) = T(2,-1) = (1,3) = v_1$ e $T(u_2) = T(1,1) = (2,3) = v_2$, obtemos

$$\begin{aligned} T(x,y) &= \frac{x-y}{3}T(2,-1) + \frac{x+2y}{3}T(1,1) \\ &= \frac{x-y}{3}(1,3) + \frac{x+2y}{3}(2,3) \\ &= (x+y, 2x+y). \end{aligned}$$

Portanto, $T(x,y) = (x+y, 2x+y)$ é a transformação linear que satisfaz $T(u_i) = v_i$, $i = 1,2,3$.

3) Determine $T : V \longrightarrow W$ conhecendo os valores de T na base de V.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, tal que $T(1,3,-1) = (1,1,-1,0)$, $T(2,0,1) = (0,0,1,-1)$ e $T(0,-1,1) = (1,0,-1,0)$

Solução

Para determinar T, escrevemos

$$a(1,3,-1) + b(2,0,1) + c(0,-1,1) = (x,y,z)$$

De onde temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ 3a - c = y \\ -a + b + c = z. \end{cases}$$

Cuja solução é $a = \dfrac{-x+2y+2z}{3}$, $b = \dfrac{2x-y-z}{3}$ e $c = -x+y+2z$. Assim,

$$\frac{-x+2y+2z}{3}(1,3,-1) + \frac{2x-y-z}{3}(2,0,1) + (-x+y+2z)(0,-1,1) = (x,y,z).$$

Logo, aplicando a transformação linear T em ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= \frac{-x+2y+2z}{3}T(1,3,-1) + \frac{2x-y-z}{3}T(2,0,1) + (-x+y+2z)T(0,-1,1) \\ &= \frac{-x+2y+2z}{3}(1,1,-1,0) + \frac{2x-y-z}{3}(0,0,1,-1) + (-x+y+2z)(1,0,-1,0) \\ &= \left(\frac{-4x+5y+8z}{3}, \frac{-x+2y+2z}{3}, 2x-2y-3z, \frac{-2x+y+z}{3}\right). \end{aligned}$$

Portanto, T acima é a transformação linear procurada.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(2,1) = (1,0)$ e $T(0,1) = (1,-1)$.

Solução

Para determinar T, escrevemos

$$a(2,1) + b(0,1) = (x,y).$$

De onde temos que $a = \dfrac{x}{2}$ e $b = y - \dfrac{x}{2}$. Assim,

$$\frac{x}{2}(2,1) + \left(y - \frac{x}{2}\right)(0,1) = (x,y).$$

Logo, aplicando a transformação linear T em ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} T(x,y) &= \frac{x}{2}T(2,1) + \left(y - \frac{x}{2}\right)T(0,1) \\ &= \frac{x}{2}(1,0) + \left(y - \frac{x}{2}\right)(1,-1) \\ &= \left(y, \frac{x}{2} - y\right). \end{aligned}$$

Portanto, T acima é a transformação linear procurada.

(c) $T : P_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(2t) = (1,1)$ e $T(-1) = (0,3)$.

Solução

Para determinar T, escrevemos

$$a2t + b(-1) = a_0 + a_1 t.$$

De onde temos que $a = \dfrac{a_1}{2}$ e $b = -a_0$. Assim,

$$\frac{a_1}{2}2t + -a_0(-1) = a_0 + a_1 t.$$

Logo, aplicando a transformação T de ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$T(a_0 + a_1 t) = \frac{a_1}{2}T(2t) - a_0 T(-1) = \frac{a_1}{2}(1,1) - a_0(0,3) = \left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_1}{2} - 3a_0\right).$$

Portanto, T acima é a transformação linear procurada.

(d) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1,0), \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = (2,1),$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (0,1), \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (-1,1).$$

Solução

Para determinar T, escrevemos

$$a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

De onde temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 2c + d = a_{11} \\ -a + b = a_{12} \\ b = a_{21} \\ 2b + c + d = a_{22}. \end{cases}$$

Cuja solução é $a = -a_{12} + a_{21}$, $b = a_{21}$, $c = a_{11} + a_{12} + a_{21} - a_{22}$ e $d = -a_{11} - a_{12} - 3a_{21} + 2a_{22}$. Assim,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= (-a_{12}+a_{21})\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (a_{11}+a_{12}+a_{21}-a_{22})\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &+ (-a_{11}-a_{12}-3a_{21}+2a_{22})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Logo, aplicando a transformação T de ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= (-a_{12}+a_{21})T\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (a_{11}+a_{12}+a_{21}-a_{22})T\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &+ (-a_{11}-a_{12}-3a_{21}+2a_{22})T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-a_{12}+a_{21})(1,0) + a_{21}(2,1) + (a_{11}+a_{12}+a_{21}-a_{22})(0,1) \\ &+ (-a_{11}-a_{12}-3a_{21}+2a_{22})(-1,1) \\ &= (a_{11}+6a_{21}-2a_{22}, -a_{21}+a_{22}).\end{aligned}$$

Portanto, T acima é a transformação linear procurada.

4) (a) Encontre $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $Im(T) = [(1,0,-1),(1,2,2)]$.

Solução

Para determinar T, escrevemos

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Agora, tome $T(1,0,0) = (1,0,-1)$, $T(0,1,0) = (1,2,2)$ e $T(0,0,1) = (0,0,0)$, então

$$\begin{aligned}T(x,y,z) &= xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1). \\ &= x(1,0,-1) + y(1,2,2) + z(0,0,0) \\ &= (x+y, 2y, -x+2y).\end{aligned}$$

Portanto, T acima é a transformação linear procurada.

(b) Encontre $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,tal que $N(T) = [(1,0,-1)]$.

Solução

Seja $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,0,-1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ que contém o vetor $(1,0,-1)$. Então, escrevemos

$$(x,y,z) = a\,(1,0,0) + b\,(0,1,0) + c\,(1,0,-1).$$

Da igualdade acima obtemos que $a = x+y$, $b = y$ e $c = -z$. Logo,

$$(x,y,z) = (x+z)\,(1,0,0) + y\,(0,1,0) - z\,(1,0,-1).$$

Agora, aplicando a transformação T de ambos os lados da igualdade acima e considerando $T\,(1,0,0) = (1,0)$, $T\,(0,1,0) = (0,1)$ e $T\,(1,0,-1) = (0,0)$, temos que

$$\begin{aligned}T(x,y,z) &= (x+z)T\,(1,0,0) + yT\,(0,1,0) - zT\,(1,0,-1) \\ &= (x+z)(1,0) + y(0,1) - z(0,0) \\ &= (x+z, y).\end{aligned}$$

Portanto, T acima é a transformação linear procurada.

5) Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear

(a) Mostre que se $T(v_1), ..., T(v_n) \in W$ são L.I. então $v_1, ..., v_n$ são L.I.

Prova

Sejam $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0.$$

Aplicando a transformação linear T a ambos os lados da igualdade acima, temos

$$T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = T(0) \Leftrightarrow \alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_n T(v_n) = 0.$$

Como por hipótese o conjunto $\beta = \{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ é L.I, segue que $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.
Portanto, o conjunto $\chi = \{v_1, ..., v_n\}$ é L.I.

(b) Mostre que se $V = W$ e os vetores $T(v_1), ..., T(v_n)$ geram V então os vetores $v_1, ..., v_n \in V$ geram V.

Prova

Se os vetores $T(v_1), ..., T(v_n)$ geram V, então podemos tomar um subconjunto deste que é base de V, digamos $T(v_1), ..., T(v_m)$, com $m \leq n$. Então a $dimV = m$, ou seja, achamos uma base de V com m vetores. Por outro lado, pelo item (a), $v_1, ..., v_m$ são L.I e, assim, formam uma base de V.
Portanto, $v_1, ..., v_m$ geram V e, com mais razão, $v_1, ..., v_n$ também vai gerar V.

6) Seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que se $u \in Ker(T)$ e $v \in Im(T)$ então $T(u) \in Ker(T)$ e $T(v) \in Im(T)$.

Prova

Seja $u \in Ker(T)$. Então $T(T(u)) = T(0) = 0$, isto é, $T(u) \in Ker(T)$. Por outro lado, temos que $T(v) \in Im(T)$ para qualquer $v \in V$; em particular, $v \in Im(T) \Rightarrow T(v) \in Im(T)$.

7) Defina uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $y = x$ e cuja imagem seja a reta $y = 2x$.

Solução

Queremos encontrar uma transformação linear T tal que $Ker(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ e $Im(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.

Os vetores pertencentes ao $Ker(T)$ são da forma $(x, x) = x(1, 1)$. Logo, $\beta_1 = \{(1, 1)\}$ é uma base para o $Ker(T)$.

Os vetores pertencentes a $Im(T)$ são da forma $(x, 2x) = x(1, 2)$. Logo, $\beta_2 = \{(1, 2)\}$ é uma base para a $Im(T)$.

Seja $\beta = \{(1, 1), (1, 0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ obtida da extensão da base β_1 do $Ker(T)$. Então, escrevemos

$$(x, y) = a(1, 1) + b(1, 0).$$

Da igualdade de vetores acima temos que $a = y$ e $b = x - y$ e, assim,

$$(x, y) = y(1, 1) + (x - y)(1, 0).$$

Agora aplicando na igualdade acima a transformação linear T, considerando $T(1, 1) = (0, 0)$ e $T(1, 0) = (1, 2)$, obtemos

$$\begin{aligned} T(x, y) &= yT(1, 1) + (x - y)T(1, 0) \\ &= y(0, 0) + (x - y)(1, 2) \\ &= (x - y, 2(x - y)). \end{aligned}$$

Portanto, $T(x, y) = (x - y, 2(x - y))$ é a transformação linear procurada.

8) Assinale Verdadeiro ou Falso:

(a) Uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ é sobrejetora se e somente se $dimN(T) = dim(V) - dim(W)$.

Solução

Verdadeiro, supondo que as dimensões de V e W são finitas, pois do contrário, nem faz sentido escrever $dim(V) - dim(W)$. Assim, basta usar o Teorema do Núcleo e da Imagem e ver que, neste caso,
$dimIm(T) = dim(V) - dimN(T) = dimV - (dim(V) - dim(W)) = dim(W)$ e, portanto, $Im(T) = W$.

(b) Dada a transformação linear $T : V \longrightarrow W$, para todo $w \in W$ fixado, o conjunto $G = \{v \in V : T(v) = w\}$ é um subespaço de V.

Solução

Falso, pois G só será um subespaço vetorial de V quando $w = 0$.

(c) Toda transformação linear $T : C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ injetora é também sobrejetora.

Solução

Falso, como exemplo tome $T(f) = \int_0^x f(t)dt = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Agora, note que pelo Teorema fundamental do Cálculo $g' = f$, isto é, a derivada de $T(f)$ é a própria f. Logo, o núcleo é facilmente encontrado:

$$T(f) = \int_0^x f(t)dt = 0 \Rightarrow f = \frac{d0}{dx} = 0,$$

isto é, $Ker(T) = \{0\}$ e, portanto, T é injetora.

Por outro lado, seja X o conjunto de todas as funções que têm derivadas contínuas e se anulam na origem, isto é, $X = \left\{\varphi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \varphi(0) = 0\right\}$.

Note que todas as funções do tipo $g = T(f)$ têm ambas as propriedades acima:

$g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$ e $g' = f \in C^0(\mathbb{R})$ que existe e é contínua.

Assim, $Im(T) \subseteq X \neq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Portanto, T é injetora, mas não é sobrejetora.

(d) O núcleo de toda transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tem dimensão maior ou igual a 3.

Solução

Falso, tome como contra-exemplo $T(x,y,z,t,w) = (x,y,z)$ que tem $dim(ker(T)) = 2$. Note também que seria verdadeiro se $dim(ker(T)) \geq 2$.

9) Seja $T : P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow P_n(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(p) = 5p - 4p^{'} + p^{''}$. Mostre que se núcleo é $\{0\}$ e conclua que para todo polinômio $b(x)$ existe um polinômio $p(x)$ tal que $b(x) = 5p(x) - 4p^{'}(x) + p^{''}(x)$.

Solução

Seja

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n \in P_n(\mathbb{R}),$$

então

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1},$$
$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3x + ... + n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(p) &= 5p(x) - 4p'(x) + p''(x) \\ &= 5(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n) - 4(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1}) \\ &+ 2a_2 + 6a_3x + ... + n(n-1)a_nx^{n-2} \\ &= 5a_0 + a_1(5x-4) + a_2(5x^2 - 8x + 2) + a_3(5x^3 - 12x^2 + 6x) \\ &+ ... + a_n(5x^n - 4nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}). \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\beta = \left\{5, 5x-4, 5x^2 - 8x + 2, 5x^3 - 12x^2 + 6x, ..., 5x^n - 4nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}\right\}$$

é uma base para a $Im(T)$, pois β gera a $Im(T)$ e é L.I, dado que os elementos em β têm graus distintos.

Por definição, $Ker(T) = \{p \in P_n(\mathbb{R}) : T(p) = 0\}$. Assim,

$$T(p) = 0 \Leftrightarrow 5a_0 + a_1(5x-4) + a_2(5x^2 - 8x + 2) + a_3(5x^3 - 12x^2 + 6x) +$$
$$... + a_n(5x^n - 4nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}) = 0.$$

Como β é L.I, segue que $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$ e, assim, $Ker(T) = \{0\}$. Portanto, T é injetiva e, como o domínio e contra-domínio têm a mesma dimensão, concluí-se que T é sobrejetora.

Portanto, para qualquer $b(x) \in P_n(\mathbb{R})$, há um polinômio $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$ tal que $T(p) = b$.

10) Seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que $T^2 = 0$ se e somente se $T(V) \subset Ker(T)$.

Prova

Suponha que $T^2 = 0$. Assim, se $w \in T(V)$, então existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

Logo,

$$T(w) = T(T(v)) = T^2(v) = 0,$$

isto é, $w \in Ker(T)$ e, portanto, $T(V) \subseteq Ker(T)$.

Reciprocamente, suponha que $T(V) \subseteq Ker(T)$. Assim, dado $v \in V$ e como $T(v) \in T(V) \subseteq Ker(T)$, temos que

$$T^2(v) = T(T(v)) = 0.$$

Como isto vale para qualquer vetor $v \in V$, tem-se $T^2 = 0$.

11) Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Encontre o núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (xcos(\theta) - ysin(\theta), xsin(\theta) + ycos(\theta))$.

Solução

Por definição, $Ker(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) = (0,0)\}$. Assim,

$$(xcos(\theta) - ysin(\theta), xsin(\theta) + ycos(\theta)) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} xcos(\theta) - ysin(\theta) = 0, \\ xsin(\theta) + ycos(\theta) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Sabemos que $cos(\theta)$ e $sin(\theta)$ não se anulam simultaneamente para nenhum valor de θ. Em vista disso, se $cos(\theta) = 0$ ou $sin(\theta) = 0$ é imediato que a solução de $(*)$ é $x = y = 0$.

Suponhamos que sejam $sin(\theta) \neq 0$ e $cos(\theta) \neq 0$. Assim, multiplicando a primeira linha de $(*)$ por $-sin(\theta)$ e a segunda linha por $cos(\theta)$, obtemos

$$\begin{cases} -xsin(\theta)cos(\theta) + ysin^2(\theta) = 0, \\ xsin(\theta)cos(\theta) + ycos^2(\theta) = 0. \end{cases}$$

Daí segue que $ysin^2(\theta) + ycos^2(\theta) = 0 \Leftrightarrow y(sin^2(\theta) + cos^2(\theta)) = 0 \Rightarrow y = 0$. Substituindo $y = 0$ em $(*)$, temos

$$\begin{cases} xcos(\theta) = 0, \\ xsin(\theta) = 0. \end{cases} \quad (**)$$

Como $sin(\theta) \neq 0$ e $cos(\theta) \neq 0$, segue que a única solução possível para $(**)$ é $x = 0$.

Portanto, o $Ker(T) = \{(0,0)\}$.

12) Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear bijetora. Mostre que T leva retas em retas.

Solução

Dada uma reta r no plano $\mathbb{R}^2$, usaremos sua equação vetorial para representar seus pontos, isto é, um ponto $P \in r$ se, e somente se,

$$P = P_0 + \lambda v,$$

em que P_0 é um ponto sobre r, $v \neq 0$ é o vetor diretor da reta r e $\lambda \in \mathbb{R}$.

A imagem da reta r pela transformação linear bijetora T é dada por:

$$T(r) = \{T(P); P \in r\}.$$

Assim, um ponto $S \in T(r)$ se, e somente se, $S = T(P)$ para algum ponto $P \in r$, ou seja,

$$S = T(P) = T(P_0 + \lambda v) = T(P_0) + \lambda T(v), (*)$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como a transformação linear T é injetora e $v \neq 0$ temos que $T(v) \neq 0$, ou seja, $(*)$ nos fornece a equação vetorial de uma reta no plano $\mathbb{R}^2$ que passa pelo ponto $T(P_0)$ e tem a direção do vetor, não-nulo, $T(v)$.

Portanto, $T(r)$ é uma reta em $\mathbb{R}^2$.

13) Existe uma transformação linear injetora $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$?.

Solução

Suponhamos que exista uma transformação linear injetiva $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$. Uma vez que T é injetiva a $dim(Ker(T)) = 0$ e, então, utilizando o Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$dim\,(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) \Rightarrow 4 = 0 + dim(Im(T)) \Rightarrow dim(Im(T)) = 4,$$

que é um absurdo, pois a $dim(Im(T)) \leq 3 = dim(P_2(\mathbb{R}))$.

Portanto, não existe uma transformação linear injetora $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$.

14) Determine o núcleo das transformações lineares abaixo e descreva-os geometricamente.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ T(x, y) = y + 2x.$

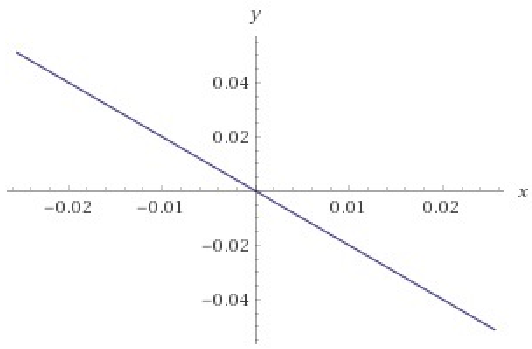
Solução

Por definição, $Ker(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = 0\}$. Assim,

$$T(x, y) = 0 \Leftrightarrow y + 2x = 0 \Leftrightarrow y = -2x.$$

Portanto, $Ker(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x\}$.

Na figura abaixo está representado geometricamente o $Ker(T)$.



(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ T(x, y) = x - 2y.$

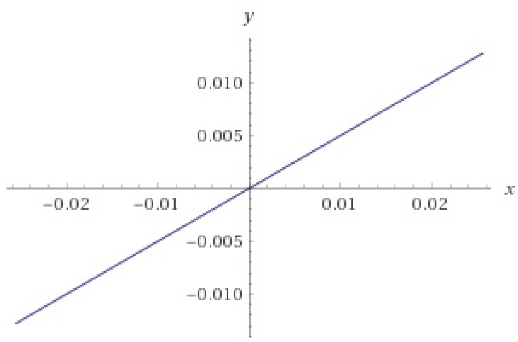
Solução

Por definição, $Ker(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = 0\}$. Assim,

$$T(x, y) = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}.$$

Portanto, $Ker(T) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{2}\right\}$.

Na figura abaixo está representado geometricamente o $Ker(T)$.



(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ T(x, y) = (2x + 2y, x + y).$

Solução

Por definição, $Ker(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0, 0)\}$. Assim,

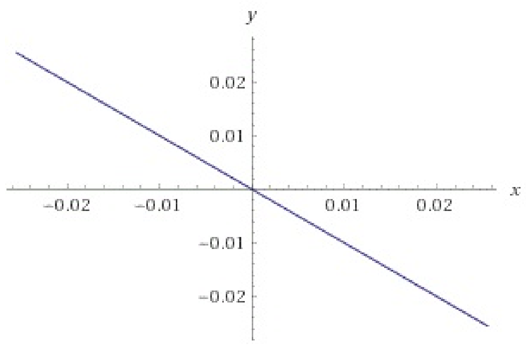
$$T(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (2x + 2y, x + y) = (0, 0) \Leftrightarrow y = -x.$$

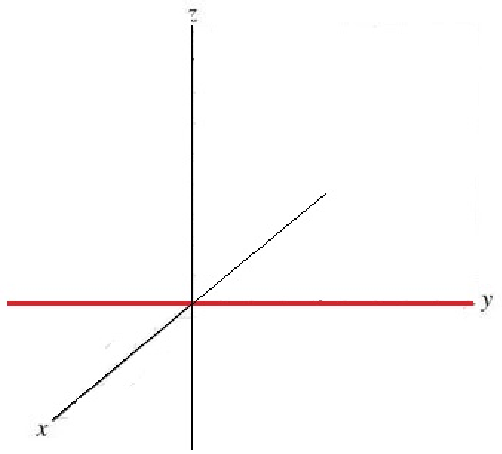
Portanto, $Ker(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}$.

Na figura abaixo está representado geometricamente o $Ker(T)$.

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ T(x, y, z) = (z - x, z - 2x, z - 3x).$

Solução





Por definição, $Ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\}$. Assim,

$$T(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (z-x, z-2x, z-3x) = (0,0,0) \Leftrightarrow x = z = 0 \;\; e \;\; y \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $Ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0 \;\; e \;\; y \in \mathbb{R}\}$.
Na figura abaixo está representado geometricamente o $Ker(T)$.

15) Determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem das transformações lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $T(x,y,z) = (x+y+z, 2x+2y+2z)$.
(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $T(x,y,z) = (x+y, y+z)$.
(c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ $T(x,y,z,t) = (x-y+z+t, 2x-2y+3z+4t, 3x-3y+4z+5t)$.
(d) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ $T(x,y,z,s,t) = (x+2y+2z+s+t, x+2y+3z+2s-t, 3x+6y+8z+5s-t)$.

Solução

(a) $dim(Nuc\ T) = 2, \{(1,0,-1),(1,-1,0)\}$; $dim(Im\ T) = 1, \{(1,2)\}$.
(b) $dim(Nuc\ T) = 1, \{(1,-1,1)\}$; $dim(Im\ T) = \mathbb{R}^2, \{(1,0),(0,1)\}$.
(c) $dim(Nuc\ T) = 2, \{(1,1,0,0),(1,0,-2,1)\}$; $dim(Im\ T) = 2, \{(1,2,3),(1,3,4)\}$.
(d) $dim(Nuc\ T) = 3, \{(-2,1,0,0,0),(1,0,-1,1,0),(-5,0,2,0,1)\}$;$dim(Im\ T) = 2, \{(1,1,3),(0,1,2)\}$.

16) Determinar um $T \in L(P_3(\mathbb{R}), P_2(\mathbb{R}))$ cujo núcleo seja gerado pelos polinômios $1+x^3$ e $1-x^2$.

Solução

Seja $\beta = \{1+x^3, 1-x^2, x, 1\}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ obtida da extensão de $\beta_1 = \{1+x^3, 1-x^2\}$. Escrevemos,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 &= a(1+x^3) + b(1-x^2) + cx + d \\ &= a + ax^3 + b - bx^2 + cx + d \\ &= a + b + d + cx - bx^2 + ax^3. \end{aligned}$$

Da igualdade de vetores acima obtemos que $a = a_3$, $b = -a_2$, $c = a_1$ e $d = a_0 + a_2 - a_3$. Assim,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_3(1 + x^3) - a_2(1 - x^2) + a_1x + (a_0 + a_2 - a_3)(1).$$

Aplicando a transformação linear T na igualdade acima e considerando $T(1 + x^3) = 0$, $T(1 - x^2) = 0$, $T(x) = x$ e $T(1) = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) &= a_3T(1 + x^3) - a_2T(1 - x^2) + a_1T(x) + (a_0 + a_2 - a_3)T(1) \\ &= a_30 - a_20 + a_1x + (a_0 + a_2 - a_3)1 \\ &= a_1x + a_0 + a_2 - a_3. \end{aligned}$$

Portanto, $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1x + a_0 + a_2 - a_3$ é a transformação linear procurada.

17) Encontre uma base para o núcleo e outra para a imagem de $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p) = p^{'} + p^{''}$.

<u>**Solução**</u>

Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in P_2(\mathbb{R})$. Temos que $p'(x) = a_1 + 2a_2x$ e $p''(x) = 2a_2$, então

$$T(p) = p^{'} + p^{''} = a_1 + 2a_2x + 2a_2 = a_1 + 2a_2(1 + x).$$

Agora vamos determinar uma base para o $Ker(T) = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : T(p) = 0\}$. Logo,

$$T(p) = 0 \Leftrightarrow a_1 + 2a_2(1 + x) \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0.$$

Portanto, os polinômios pertencentes ao $Ker(T)$ são da forma $p(x) = a_0$ e, assim, $\beta = \{1\}$ é uma base para o $Ker(T)$.

Para determinar uma base para a $Im(T)$, escrevemos

$$a_1 + 2a_2(1 + x) = a_1(1) + a_2(2 + 2x).$$

Portanto, $\sigma = \{1, 2 + 2x\}$ é uma base para a $Im(T)$.

18) Mostre que se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita tais que $dimU = dimV$ e se $T \in L(U, V)$ então as seguintes condições são equivalentes:

(a) T é sobrejetora.

(b) T é injetora.

(c) T é bijetora.

(d) T leva bases de U em bases de V.

<u>**Prova**</u>

$(a) \Rightarrow (b)$. Se a transformação linear é sobrejetora, então $T(U) = V$. Logo, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos

$$dim(U) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(Ker(T)) + dim(V).$$

Uma vez que a $dim(U) = dim(V)$, segue da igualdade acima que a $dim(Ker(T)) = 0$, isto é, $Ker(T) = \{0\}$ e, assim, a tranformação linear é injetora.

$(b) \Rightarrow (c)$. Se a transformação linear T é injetora, então $Ker(T) = \{0\}$ e $dim(Ker(T)) = 0$. Logo, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$dim(U) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(Im(T)).$$

Como $dim(U) = dim(V)$ segue que $Im(T) = V$, isto é, a transformação linear T é sobrejetora e, portanto, bijetora.

$(c) \Rightarrow (d)$. Suponhamos que a transformação linear T seja bijetora e consideremos uma base de U formada pelos vetores $u_1, ..., u_n$.

Queremos mostrar que $T(u_1), ..., T(u_n)$ formam uma base para V.

Afirmação: os vetores $T(u_1), ..., T(u_n)$ são L.I em V.

De fato, se

$$\alpha_1T(u_1) + ... + \alpha_nT(u_n) = 0$$

então, por T ser uma transformação linear, a igualdade acima é equivalente a

$$T(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n) = 0,$$

isto é, o vetor

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n \in Ker(T) = \{0\}.$$

Uma vez que T é injetora, temos que

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = 0.$$

Como $u_1, ..., u_n$ formam uma base de U eles são L.I, assim, $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.
Portanto, os vetores $T(u_1), ..., T(u_n)$ são L.I em V.
Uma vez que os vetores $T(u_1), ..., T(u_n)$ são L.I e a $dim(V) = n$, segue que eles formam uma base para V.
$(d) \Rightarrow (a)$. Se $u_1, ..., u_n$ formam uma base de U então, por hipótese, $T(u_1), ..., T(u_n)$ formam uma base de V.
Logo, dado $v \in V$, existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha_1 T(u_1) + ... + \alpha_n T(u_n).$$

Deste modo,

$$v = \alpha_1 T(u_1) + ... + \alpha_n T(u_n) = T\left(\underbrace{\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n}_{\in U}\right),$$

ou seja, existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$, isto é, a transformação linear T é sobrejetora.

19) (a) É $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(-1) = 0\}$ isomorfo a $\mathbb{R}^2$? Em caso afirmativo forneça uma prova; em casa negativo forneça um contraexemplo.

Solução

Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in P_3(\mathbb{R})$. Então,

$$p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = a_0 - a_1 + a_2.$$

Portanto, os polinômios em W são da forma

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + (a_0 - a_1 + a_2)x^3 \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_0 x^3 - a_1 x^3 + a_2 x^3 \\ &= a_0(1 + x^3) + a_1(x - x^3) + a_2(x^2 + x^3). \end{aligned}$$

Portanto, $\beta = \left\{1 + x^3, x - x^3, x^2 + x^3\right\}$ é uma base de W, isto é, $dim(W) = 3$.
Agora suponhamos que exista um isomorfismo T entre W e $\mathbb{R}^2$. Assim, $dim(Ker(T)) = 0$ e $dim(Im(T)) = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$. Logo, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$dim(W) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) \Rightarrow 3 = 0 + 2 = 2,$$

que é um absurdo e, assim, W não é isomorfo a $\mathbb{R}^2$.

(b) É $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(-1) = 0\}$ isomorfo a $\mathbb{R}$? Em caso afirmativo forneça uma prova; em casa negativo forneça um contra-exemplo.

Solução

De forma análoga ao item (a), concluímos que não há isomorfismo entre W e $\mathbb{R}$, pois $3 = dim(W) \neq dim(\mathbb{R}) = 1$.

20) Mostre que $W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A_{11} = A_{12} \text{ e } A_{22} = A_{21}\}$ é isomorfo a $P_1(\mathbb{R})$.

Solução

Os elementos de W são da forma

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{11} \\ A_{22} & A_{22} \end{pmatrix} = A_{11}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\beta = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\},$$

é uma base para W.

Como espaços vetoriais de mesma dimensão são isomorfos e $dim(W) = 2 = dim(P_1(\mathbb{R}))$, temos que W e $P_1(\mathbb{R})$ são isomorfos.