Álgebra Linear - 2019.1

Lista 5 - Transformações Lineares

1) Quais das transformações abaixo são lineares?

(a) $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(x,y,z)=(z,2^y,2^z)$.

(b) $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(x,y,z)=(3x,2,5z)$.

(c) $T:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(x,y,z,w)=(x-w,y-w,x+z)$.

(d) $T:M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n, T(A)=(A_{11},A_{22},...,A_{nn})$.

(e) $T:C^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R}), T(f)=3f^{''}-2f^{'}+1$.

(f) $T:M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, T(A)=A_{11}A_{22}-A_{21}A_{12}$.

(g) $T:C([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, T(f)=\int\limits_a^b f(x)dx$

(h) $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(x,y)=(|x|,2x+2y)$.

(i) $T:P_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3)=(a_3+a_2-a_1,a_0)$.

(j) $T:M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(A)=(A_{11}-A_{12},A_{11}+A_{12})$.

(k) $T:M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(A)=(A_{11}-A_{12},A_{21}+A_{22},2A_{11}-A_{21})$

(l) $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(x,y)=(x+y,x-y)$

(m) $T:M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, T(A)=det(A)$,

(n) $T:M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R}), T(A)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(o) $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, T(x,y)=xy$.

(p) $T:P_2 \longrightarrow P_3, T(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+c$.

(q) $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow M_{2\times 2}, T(x,y)=\begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix}$.

2) Dados os vetores $u_1=(2,-1), u_2=(1,1), u_3=(-1,-4), v_1=(1,3), v_2=(2,3), v_3=(-5,-6)$ decida se existe ou não uma transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(u_i)=v_i, i=1,2,3$.

3) Determine $T:V \longrightarrow W$ conhecendo os valores de T na base de V.

(a) $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, tal que $T(1,3,-1)=(1,1,-1,0)$, $T(2,0,1)=(0,0,1,-1)$ e $T(0,-1,1)=(1,0,-1,0)$

(b) $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(2,1)=(1,0)$ e $T(0,1)=(1,-1)$.

(c) $T:P_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(2t)=(1,1)$ e $T(-1)=(0,3)$.

(d) $T:M_{2x2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)=(1,0),\ T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)=(2,1),$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)=(0,1),\ T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)=(-1,1).$$

4) (a) Encontre $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $Im(T)=[(1,0,-1),(1,2,2)]$.

(b) Encontre $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,tal que $N(T)=[(1,0,-1)]$.

5) Seja $T:V \longrightarrow W$ uma transformação linear

(a) Mostre que se $T(v_1),...,T(v_n)\in W$ são L.I. então $v_1,...,v_n$ são L.I

(b) Mostre que se $V=W$ e os vetores $T(v_1),...,T(v_n)$ geram V então os vetores $v_1,...,v_n\in V$ geram V.

6) Seja $T:V \longrightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que se $u\in Ker(T)$ e $v\in Im(T)$ então $T(u)\in Ker(T)$ e $T(v)\in Im(T)$.

7) Defina uma transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $y=x$ e cuja imagem seja a reta $y=2x$.

8) Assinale Verdadeiro ou Falso:

(a) Uma transformação linear $T:V \longrightarrow W$ é sobrejetora se e somente se $dimN(T)=dim(V)-dim(W)$.

(b) Dada a transformação linear $T:V \longrightarrow W$, para todo $w\in W$ fixado, o conjunto $G=\{v\in V:T(v)=w\}$ é um subespao de V.

(c) Toda transformação linear $T:C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ injetora é também sobrejetora.

(d) O núcleo de toda transformação linear $T:\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tem dimensão maior ou igual a 3.

9) Seja $T:P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow P_n(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(p)=5p-4p^{'}+p^{''}$. Mostre que se núcleo é $\{0\}$ e conclua que para todo polinômio $b(x)$ existe um polinômio $p(x)$ tal que $b(x)=5p(x)-4p^{'}(x)+p^{''}(x)$.

10) Seja $T:V \longrightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que $T^2=0$ se e somente se $T(V)\subset Ker(T)$.

11) Seja $\theta\in\mathbb{R}$ Encontre o núcleo da transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y)=(xcos(\theta)-ysin(\theta),xsin(\theta)+ycos(\theta))$

12) Seja $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear bijetora. Mostre que T leva retas em retas.

13) Existe uma transformação linear injetora $T:M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$?.

14) Determine o núcleo das transformações lineares abaixo e descreva-os geometricamente.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ T(x, y) = y + 2x$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T(x, y) = x - 2y$.

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ T(x, y) = (2x + 2y, x + y)$.

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ T(x, y, z) = (z - x, z - 2x, z - 3x)$.

15) Determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem das transformações lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\ T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z)$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\ T(x, y, z) = (x + y, y + z)$.

(c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\ T(x, y, z, t) = (x - y + z + t, 2x - 2y + 3z + 4t, 3x - 3y + 4z + 5t)$.

(d) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3\ T(x, y, z, s, t) = (x + 2y + 2z + s + t, x + 2y + 3z + 2s - t, 3x + 6y + 8z + 5s - t)$.

16) Determinar um $T \in L(P_3(\mathbb{R}), P_2(\mathbb{R}))$ cujo núcleo seja gerado pelos polinômios $1 + x^3$ e $1 - x^2$.

17) Encontre uma base para o núcleo e outra para a imagem de $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p) = p^{'} + p^{''}$.

18) Mostre que se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita tais que $dimU = dimV$ e se $T \in L(U, V)$ então as seguintes condições são equivalentes:

(a) T é sobrejetora.

(b) T é injetora.

(c) T é bijetora.

(d) T leva bases de U en bases de V.

19) (a) É $W = \{p \in P_3(\mathbb{R} : p(-1) = 0)\}$ isomorfo a $\mathbb{R}^2$? Em caso afirmativo forneça uma prova; em casa negativo forneça um contraexemplo.

(b) É $W = \{p \in P_3(\mathbb{R} : p(-1) = 0)\}$ isomorfo a $\mathbb{R}$? Em caso afirmativo forneça uma prova; em casa negativo forneça um contra-exemplo.

20) Mostre que $W = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) : A_{11} = A_{12}$ e $A_{22} = A_{21}\}$ é isomorfo a $P_1(\mathbb{R})$.