Álgebra Linear - 2019.1

Lista 8 - Autovalores e Autovetores

1) Sendo $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, mostre que o conjunto $V_\lambda = \{v \in V : Tv = \lambda v\}$, formado pelos autovetores associados a um autovalor λ, inclusive $v = 0$, é um subespaço vetorial de V.

Solução

Sejam $u, v \in V_\lambda$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

i. $0 \in V_\lambda$, pois $T(0) = 0 = \lambda 0$.

ii. $T(u+v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$.
Logo, $u + v \in V_\lambda$.

iii. $T(\alpha u) = \alpha(T(u)) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u)$.
Assim, $\alpha u \in V_\lambda$.

Portanto, V_λ é um subespaço vetorial de V.

2) Encontre os autovalores e autovetores associados dos operadores lineares $T : V \longrightarrow V$ e matrizes em $M(n, n)$ seguintes:

(a) $V = \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, 2x + y)$

Solução

Seja $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$. Então,

$$T(1,0) = (1,2) = 1(1,0) + 2(0,1),$$
$$T(0,1) = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1).$$

Portanto,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico é:

$$p(\lambda) = det\left([T]_C - \lambda I\right) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 1.$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 - \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

Vamos determinar os autoespaços associados aos respectivos autovalores:

- Para $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$, temos

$$\left([T]_C - \lambda_1 I\right) v_1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} y_1 \\ y_1 = y_1 \end{cases}.$$

Assim,

$$V_{1-\sqrt{2}} = \left\{ (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} y_1 \right\}.$$

Portanto, uma base para o autoespaço $V_{1-\sqrt{2}}$ é $\beta_1 = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) \right\}$. Em outras palavras, $v_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$.

- Para $\lambda_2 = 1+\sqrt{2}$, temos

$$([T]_C - \lambda_2 I)\, v_2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} y_2 \\ y_2 = y_2 \end{cases}.$$

Logo,

$$V_{1+\sqrt{2}} = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} y_2 \right\}.$$

Portanto, uma base para o autoespaço $V_{1+\sqrt{2}}$ é $\beta_2 = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right) \right\}$. Em outras palavras, $v_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$.

(b) $V = \mathbb{R}^2, T(x,y) = (-y, x)$

<u>**Solução**</u>

Seja $C = \{(1,0), (0,1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1), \\ T(0,1) &= (-1,0) = -1(1,0) + 0(0,1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico é:

$$p(\lambda) = det\,([T]_C - \lambda I) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0,$$

que não tem solução em $\mathbb{R}$.

Portanto, concluímos que $[T]_C$ não tem autovalores em $\mathbb{R}$ nem autovetores em $\mathbb{R}^2$.

(c) $V = P_2, T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$

<u>**Solução**</u>

Seja $C = \{x^2, x, 1\}$ a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$. Então,

$$\begin{aligned} T(x^2) &= x^2 = 1(x^2) + 0(x) + 0(1), \\ T(x) &= 1 = 0(x^2) + 0(x) + 1(1), \\ T(1) &= x = 0(x^2) + 1(x) + 0(1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico é:

$$p(\lambda) = det\,([T]_C - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = (-1)(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (-1)(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -1.$$

Vamos determinar os autoespaços associados aos seus respectivos autovalores:

- Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, temos
$T(ax^2+bx+c) = ax^2+cx+b = \lambda_1(ax^2+bx+c) \Leftrightarrow ax^2+cx+b = ax^2+bx+c \Longleftrightarrow b = c, a, c \in \mathbb{R}$.
Logo,
$$V_1 = \left\{p(x) = ax^2+bx+c \in P_2(\mathbb{R}) : p(x) = ax^2+bx+b, a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$
Portanto, uma base para V_1 é $\beta_1 = \left\{x^2, x+1\right\}$. Em outras palavras, $p_1(x) = x^2$ e $p_2(x) = x+1$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
- Para $\lambda_3 = -1$, temos
$T(ax^2+bx+c) = ax^2+cx+b = \lambda_3(ax^2+bx+c) \Leftrightarrow ax^2+cx+b = -ax^2-bx-c \Longleftrightarrow a = 0, b = -c, c \in \mathbb{R}$.
Assim,
$$V_{-1} = \left\{p(x) = ax^2+bx+c \in P_2(\mathbb{R}) : p(x) = -cx+c, c \in \mathbb{R}\right\}.$$
Portanto, $\beta_2 = \{-x+1\}$ é uma base para V_{-1}. Em outras palavras, $p_3(x) = -x+1$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 = -1$.

(d) $V = P_2, T(ax^2+bx+c) = 2ax+b$, (derivada)

Solução

Seja $C = \left\{x^2, x, 1\right\}$ a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$. Então,
$$\begin{aligned} T(x^2) &= 2x = 0(x^2)+2(x)+0(1),\\ T(x) &= 1 = 0(x^2)+0(x)+1(1),\\ T(1) &= 0 = 0(x^2)+0(x)+0(1). \end{aligned}$$
Portanto,
$$[T]_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Assim, o polinômio característico é:
$$p(\lambda) = det\left([T]_C - \lambda I\right) = det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0\\ 2 & -\lambda & 0\\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3.$$
Logo,
$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$
Vamos determinar o autoespaço associado aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$:
$$T(ax^2+bx+c) = 2ax+b = \lambda_1(ax^2+bx+c) \Leftrightarrow 2ax+b = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0, c \in \mathbb{R}.$$
Assim,
$$V_0 = \left\{p(x) = ax^2+bx+c \in P_2(\mathbb{R}) : p(x) = c, c \in \mathbb{R}\right\}.$$
Por conseguinte, $\beta = \{1\}$ é uma base para V_0.

(e) $V = M(2,2), T(A) = A^T, A \in M(2,2)$

Solução

Seja $C = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ a base canônica de $M(2,2)$. Então,
$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico é:

$$p(\lambda) = det\left([T]_C - \lambda I\right) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \quad e \quad \lambda_4 = -1.$$

Vamos determinar os autoespaços associados aos respectivos autovalores:

- Para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, temos

$$T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = a_{11} \\ a_{12} = a_{21} \\ a_{22} = a_{22} \end{cases}.$$

  Assim,

$$V_1 = \{A \in V : T(A) = \lambda_1 A\} = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V : a_{12} = a_{21}\right\}$$

  Portanto, $\beta_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ é uma base para V_1.

- Para $\lambda_4 = -1$, temos

$$T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = \lambda_4 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{12} = -a_{21} \\ a_{22} = 0. \end{cases}$$

  Assim,

$$V_{-1} = \{A \in V : T(A) = \lambda_4 A\} = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V : a_{11} = a_{22} = 0 \quad e \quad a_{12} = -a_{21}\right\}$$

  Portanto, $\beta_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ é uma base para V_{-1}.

(f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

<u>**Solução**</u>

O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = det\left(A - \lambda I\right) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1).$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -1.$$

Vamos calcular os autoespaços associados aos respectivos autovalores:

- Para $\lambda_1 = 1$, temos

$$(A - \lambda_1 I)\, v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 2 \\ 0 & -1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ y_1 = 0. \end{cases}$$

  Logo,

$$V_1 = \left\{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 | y_1 = 0\right\}.$$

  Portanto, $\beta_1 = \{(1,0)\}$ é uma base para V_1.

- Para $\lambda_2 = -1$, temos

$$(A - \lambda_1 I)\, v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 2 \\ 0 & -1-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -y_2 \\ y_2 = y_2. \end{cases}$$

Assim,

$$V_{-1} = \left\{(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = -y_2\right\}.$$

Portanto, $\beta_2 = \{(-1, 0)\}$ é uma base para V_{-1}.

(g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

<u>**Solução**</u>

O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = det\,(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

Vamos calcular os autoespaços associados aos respectivos autovalores:

- Para $\lambda_1 = 0$, temos

$$(A - \lambda_1 I)\, v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -y_1 \\ y_1 = y_1. \end{cases}$$

Assim,

$$V_0 = \left\{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = -y_1\right\}.$$

Portanto, uma base para V_0 é $\beta_1 = \{(-1, 1)\}$.

- Para $\lambda_2 = 2$, temos

$$(A - \lambda_1 I)\, v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_2 \\ y_2 = y_2. \end{cases}$$

Logo,

$$V_2 = \left\{(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = y_2\right\}.$$

Portanto, $\beta_2 = \{(1, 1)\}$ é uma base para V_2.

(h) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

<u>**Solução**</u>

O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = det\,(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 24 = (\lambda + 4)(\lambda - 6).$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 4)(\lambda - 6) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 6.$$

Vamos calcular os autoespaços associados aos respectivos autovalores:

- Para $\lambda_1 = -4$, temos

$$(A-\lambda_1 I)\,v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5-\lambda_1 & 3 \\ 3 & -3-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{3}y_1 \\ y_1 = y_1 \end{cases}$$

Logo,

$$V_{-4} = \left\{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = -\frac{1}{3}y_1\right\}.$$

Portanto, $\beta_1 = \left\{\left(-\frac{1}{3}, 1\right)\right\}$. é uma base para V_{-4}.

- Para $\lambda_2 = 6$, temos

$$(A-\lambda_1 I)\,v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5-\lambda_2 & 3 \\ 3 & -3-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3y_2 \\ y_2 = y_2 \end{cases}$$

Assim,

$$V_6 = \{(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 3y_2\}.$$

Portanto, uma base para V_6 é $\beta_2 = \{(3, 1)\}$.

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Solução

O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = det\,(A-\lambda I) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & -3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda - 32 = (-1)(\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda-4).$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (-1)(\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda-4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4.$$

Vamos determinar os autoespaços associados aos respectivos autovalores:

- Para $\lambda_1 = -2$, temos que

$$(A-\lambda_1 I)\,v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 3 & -3 \\ 0 & 4-\lambda_1 & 0 \\ -3 & 3 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y_1 = 0 \quad e \quad x_1 = z_1.$$

Logo,

$$V_{-2} = \{(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 | y_1 = 0 \quad e \quad x_1 = z_1\}.$$

Portanto, uma base para V_{-2} é $\beta_1 = \{(1, 0, 1)\}$.

- Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$, temos

$$(A-\lambda_2 I)\,v_2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 3 & -3 \\ 0 & 4-\lambda_2 & 0 \\ -3 & 3 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_2 - z_2 \\ y_2 = y_2 \\ z_2 = z_2. \end{cases}$$

Assim,

$$V_4 = \left\{(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 | x_2 = y_2 - z_2\right\}.$$

Portanto, uma base para V_4 é $\beta_2 = \{(1,1,0), (-1,0,1)\}$.

(j) $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 14 \\ 2 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}$

Solução

O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = det\,(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -4 & 14 \\ 2 & -7-\lambda & 14 \\ 2 & -4 & 11-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 45\lambda + 81 = (-1)(\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-9).$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (-1)(\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-9) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -3 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 9.$$

Vamos determinar os autoespaços associados aos respectivos autovalores:

- Para $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, temos

$$(A - \lambda_1 I)\, v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1-\lambda_1 & -4 & 14 \\ 2 & -7-\lambda_1 & 14 \\ 2 & -4 & 11-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 14 \\ 2 & -4 & 14 \\ 2 & -4 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2y_1 - 7z_1 \\ y_1 = y_1 \\ z_1 = z_1. \end{cases}$$

Logo,

$$V_{-3} = \left\{(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 2y_1 - 7z_1\right\}.$$

Portanto, uma base para V_{-3} é $\beta_1 = \{(2,1,0), (-7,0,1)\}$.

- Para $\lambda_3 = 9$, temos que

$$(A - \lambda_3 I)\, v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1-\lambda_3 & -4 & 14 \\ 2 & -7-\lambda_3 & 14 \\ 2 & -4 & 11-\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -10 & -4 & 14 \\ 2 & -16 & 14 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_2 = z_2 \\ y_2 = y_2 \\ z_2 = z_2 \end{cases}$$

Logo,

$$V_9 = \left\{(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 | x_2 = y_2 = z_2\right\}.$$

Portanto, uma base para V_9 é $\beta_2 = \{(1,1,1)\}$.

3) (a) Calcule os autovalores reais e seus autovetores do operador linear em $\mathbb{R}^3$ dado pela rotação de θ em torno de z:

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução

O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = det\,(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} cos\theta - \lambda & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2cos\theta\lambda + 1).$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 2cos\theta\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 2cos\theta\lambda + 1 = 0.$$

Daí,

$$\lambda = \frac{2cos\theta \pm \sqrt{4cos^2\theta - 4}}{2} = \frac{2cos\theta \pm \sqrt{4(cos^2\theta - 1)}}{2} = \frac{2cos\theta \pm \sqrt{-4sin^2\theta}}{2}.$$

Em vista disso, se $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, só temos um único autovalor real, a saber, $\lambda = 1$.
Se $\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, temos o autovalor $\lambda = 1$ de multiplicidade algébria 3.
Se $\theta = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, temos o autovalor $\lambda = -1$ de multiplicidade algébrica 2 e o autovalor $\lambda = 1$ de multiplicidade algébrica 1.
Vamos calcular os autovetores para cada um dos casos:

- Para $\lambda = 1$ e $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{pmatrix} cos\theta - 1 & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = y_1 = 0 \quad e \quad z_1 \in \mathbb{R}.$$

Portanto, o autovetor associado ao autovalor 1 é:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Os outros dois casos fica como exercício.

(b) rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno de $(1,1,1)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

[Dica: qual é o autovetor (direção invariante) óbvio?]

Solução

O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix} = (-\lambda^2 - 1)(\lambda - 1).$$

Logo, o único autovalor é $\lambda = 1$. Calculemos o autovetor a ele associado.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow x = y = z$.
Portanto, um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$ é:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4) Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Encontre os autovalores de A e A^{-1}

Solução

Primeiramente encontremos os autovalores da matriz A.
O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = det\,(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

Portanto,

$$p(\lambda)=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda_1=-1 \quad \text{e} \quad \lambda_2=2.$$

Temos que

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$p(\lambda)=det\left(A^{-1}-\lambda I\right)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}=(\lambda+1)(\lambda-\frac{1}{2}).$$

Portanto,

$$p(\lambda)=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-\frac{1}{2})=0 \Rightarrow \lambda_1=-1 \quad \text{e} \quad \lambda_2=\frac{1}{2}.$$

(b) Encontre os autovetores.

Solução

Vamos determinar os autoespaços associados aos autovalores da matriz A.

Para $\lambda_1=-1$, temos

$$(A-\lambda_1 I)\,v_1=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-2y_1 \\ y_1=y_1. \end{cases}$$

Assim,

$$V_{-1}=\left\{(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2 : x_1=-2y_1\right\}$$

Portanto, $\beta_1=\{(-2,1)\}$ é uma base para V_{-1}. Em outras palavras, $v_1=(-2,1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1=-1$.

Para $\lambda_2=2$, temos

$$(A-\lambda_2 I)\,v_2=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_2=y_2.$$

Assim,

$$V_2=\left\{(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2 : x_2=y_2\right\}$$

Portanto, $\beta_2=\{(1,1)\}$ é uma base para V_2. Em outras palavras, $v_2=(1,1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2=2$.

Agora, vamos determinar os autoespaços associados aos autovalores da matriz A^{-1}.

Para $\lambda_1=-1$, temos

$$\left(A^{-1}-\lambda_1 I\right)v_1=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda_1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-2y_1 \\ y_1=y_1 \end{cases}.$$

Assim,

$$V_{-1}=\left\{(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2 : x_1=-2y_1\right\}$$

Portanto, $\beta_1=\{(-2,1)\}$ é uma base para V_{-1}. Em outras palavras, $v_1=(-2,1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1=-1$.

Para $\lambda_2=\frac{1}{2}$, temos

$$\left(A^{-1}-\lambda_2 I\right)v_2=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda_1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=y_2 \\ y_2=y_2 \end{cases}.$$

Assim,

$$V_{\frac{1}{2}} = \left\{(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = y_2\right\}$$

Portanto, $\beta_2 = \{(1,1)\}$ é uma base para $V_{\frac{1}{2}}$. Em outras palavras, $v_2 = (1,1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$.

5) Dado um operador linear $T : V \longrightarrow V$, mostre que $ker(T) = V_\lambda$, com $\lambda = 0$. Mostre que quando $\lambda = 0$ é autovalor, T não é injetora. Mostre a recíproca: quando T não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de T.

Prova

i. Mostremos que o $Ker(T) = V_\lambda$, com $\lambda = 0$.
Por definição, temos que

$$V_0 = \{v \in V; T(v) = 0 = 0v = 0\} = \{v \in V; T(v) = 0\} = Ker(T).$$

Portanto, o $Ker(T) = V_\lambda$, com $\lambda = 0$.

ii. Agora vamos mostrar que quando $\lambda = 0$ é autovalor, T não é injetora. Para tal, seja v o autovetor associado ao autovalor $\lambda = 0$. Então,

$$T(v) = \lambda v = 0v = 0.$$

Portanto, T não é injetora, pois $Ker(T) \neq \{0\}$.

iii. Por fim, mostremos a recíproca: quando T não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de T. Para tal, seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear não injetor. Como T é não injetor, existe um vetor não nulo $v \in Ker(T)$, tal que

$$T(v) = \lambda v = 0v = 0.$$

Portanto, $\lambda = 0$ é autovalor de T.

6) Verifique quais dos operadores e matrizes da questão 2 são diagonalizáveis. (Um operador é diagonalizável quando sua matriz de transformação em alguma base é diagonalizável. Uma matriz é diagonalizável quando é possível encontrar uma base de autovetores para V.)

Solução

Não são diagonalizáveis os operadores dos itens (b) e (d), pois não admitem uma base de autovetores para V.

7) Diagonalize a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, i.e., encontre uma matriz M tal que $M^{-1}AM$ é uma matriz diagonal. Verifique que $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, onde λ_1, λ_2 são os autovalores de A.

Solução

Pelo exercício 2, item h, obtemos que os autovalores de A são $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = 6$. Os respectivos autovetores são $v_1 = \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ e $v_2 = (3,1)$.

Logo,

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

8) Diagonalize a matriz A em $(2.i)$.

Solução

Pelo exercício 2, item i, obtemos que os autovalores de A são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$. Os respectivos autovetores são $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,0)$ e $v_3 = (-1,0,1)$.

Logo,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

9) Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias para as variáveis $x(t), y(t)$:

$$x^{'} = 5x + 3y,$$
$$y^{'} = 3x - 3y.$$

(utilize o exercício 7.)

Solução

Pelo exercício 2, item h, obtemos que os autovalores de A são $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = 6$. Os respectivos autovetores são $v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Logo, sabemos que a solução é:

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = c_1 e^{-4t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{6t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10) Sendo A a matriz do exercício 7, calcule A^2, A^4 e A^{10}. Utilize $A^2 = (MDM^{-1})(MDM^{-1}) = MD^2M^{-1}$, onde D é a matriz diagonal após diagonalização. Calcule A^2 explicitamente e compare.

Solução

No exercício 7 determinamos que

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \quad e \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$A^2 = MD^2M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-4)^2 & 0 \\ 0 & (6)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

$$A^4 = MD^4M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-4)^4 & 0 \\ 0 & (6)^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

$$A^{10} = MD^{10}M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-4)^{10} & 0 \\ 0 & (6)^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

11) Diz-se que um operador linear $T : V \longrightarrow V$ é nilpotente se existir um número inteiro positivo n, tal que $T^n = 0 (i.e., T \circ T \circ ... \circ T(v) = 0 \; \forall v \in V)$. Sendo T nilpotente,

(a) Encontre seus autovalores;

Solução

Seja v um autovetor associado ao autovalor λ. Então,

$T(v) = \lambda v$, $T^2(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$ e, prosseguindo, obtemos que $T^n(v) = \lambda^n v = 0 \Rightarrow \lambda^n = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

Portanto, $\lambda = 0$ é o único autovalor com multiplicidade algébrica n do operador linear nilpotente.

(b) Mostre que um operador linear nilpotente, não nulo, não é diagonalizável;

Solução

Seja A a matriz do operador linear nilpotente, não nulo, em uma base de V.

Suponhamos que A seja diagonalizável, então existem matrizes M, M^{-1} e uma matriz diagonal D, formada pelos autovalores de A, ou seja, D é a matriz nula, tais que

$$A = MDM^{-1} = 0$$

O que é um absurdo, pois A é não nula.

Portanto, um operador linear nilpotente, não nulo, não é diagonalizável.

(c) Mostre que T dado em $(2.d)$ é nilpotente

Solução

Temos

$$\begin{aligned}
&T(ax^2+bx+c) = 2ax+b,\\
&T^2(ax^2+bx+c) = T(T(ax^2+bx+c)) = T(2ax+b) = 2a,\\
&T^3(ax^2+bx+c) = T(T^2(ax^2+bx+c)) = T(2a) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, T é um operador linear nilpotente.

12) Diz-se que um operador linear $T : V \longrightarrow V$ é idempotente se $T^2 = T(i.e., T \circ T(v) = T(v)\ \forall v \in V)$. Sendo T idempotente,

(a) Encontre seus autovalores;

Solução

Seja v um autovetor associado ao autovalor λ. Então,

$$T(v) = \lambda v \quad \text{e} \quad T^2(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v.$$

Logo,

$$T^2(v) = T(v) \Leftrightarrow \lambda^2 v = \lambda v \Leftrightarrow (\lambda^2 - \lambda)v = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1.$$

Portanto, os autovalores de um operador linear idempotente são $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

(b) Dê um exemplo de matriz idempotente para $V = \mathbb{R}^2$;

Solução

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y) = (x,0)$ é um operador idempotente.

De fato, temos que:

$$T^2(x,y) = T(T(x,y)) = T(x,0) = (x,0).$$

Portanto, $T^2 = T$ e, assim, T é um operador idempotente.