

Lista 3 - Bases Matemáticas (Última versão: 18/6/2017 - 22:32)

Conjuntos

1 — Descreva os conjuntos abaixo na forma enumerativa:

- $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 10\}$
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 5\}$
- $\{x \in \mathbb{N} \mid 3x + 4 \leq 10\}$
- $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + x - 6 = 0\}$
- $\{4n + 1 \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n < 5\}$
- $\{2n + 3m \mid n, m \in \mathbb{N}, n < 3 \text{ e } m \leq 4\}$
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } 2 \leq n\}$

2 — Descreva os conjuntos abaixo na forma predicativa (atenção, as respostas ao final da lista não são as únicas possíveis):

- $\{0, 1, 2, 3\}$
- $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- $\{-1, 1\}$
- $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{3n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

3 — Descreva os conjuntos abaixo na forma construtiva (atenção, as respostas ao final da lista não são necessariamente as únicas possíveis, embora sejam de certo modo 'naturais'):

- $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
- $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$
- $\{-1, 2, 5, 8, 11\}$
- $\{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é divisível por } 3\}$
- $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ tem resto } 2 \text{ na divisão por } 3\}$

4 — Identifique em qual formato cada conjunto abaixo está descrito e descreva-os nos outros dois formatos:

- $\{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq \frac{1}{2}\}$
- $\{4, 9, 16, 25\}$
- $\{n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}, -3 \leq n \leq 7\}$

5 — Sejam dados os conjuntos $X = \{0\}$, $Y = \{0, 1\}$ e $Z = \{\{0\}, 1\}$. Determine qse são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo

- $X \in Z$
- $X \subset Z$
- $X \cap Z \neq \emptyset$
- $X \cap Y \neq \emptyset$
- $Y \subset Z$
- $\emptyset(X) \cap Z \neq \emptyset$

6 — Considere os seguintes subconjuntos do conjunto universo $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4\} \\ B &= \{x \in \mathbb{U} : (x - 2)^2(x - 3) = 0\} \\ C &= \{x \in \mathbb{U} : x \text{ é par}\} \end{aligned}$$

Para esses subconjuntos determine:

- $A \cup B$
- $A \cap (B \cup C)$
- $C \cup A^c$
- $(A \cup C)^c$
- $A^c \cap C^c$
- $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$
- $\emptyset(B)$

7 — Em cada item, dê exemplos de conjuntos A, B, C satisfazendo a igualdade abaixo

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = \{1, 2, 3\}$$

- Cada conjunto contém um único elemento
- Cada conjunto contém dois elementos
- Cada conjunto contém mais de dois elementos

8 — Seja C um subconjunto de \mathbb{N} tal que

$$\{X \subset \mathbb{N} \mid 1 \notin X\} \subset \wp(C)$$

- Interprete a inclusão: Quais são os subconjuntos de \mathbb{N} que pertencem a $\wp(C)$?
- Determine todas as possibilidades para o conjunto C .

9 — Sejam A, B subconjuntos de \mathbb{N} tais que

$$\wp(A) \cap \wp(B) = \{X \subset \mathbb{N} \mid 1 \notin X\}.$$

Determine condições sobre A e B de modo que

- $A = B$
- $A \neq B$

10 — Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Prove as seguintes afirmações

- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cap B \subset B$
- $A \subset A \cup B$
- $A \cap B \subset A \cup B$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$

11 — Dados A, B, C, D conjuntos quaisquer, prove as seguintes afirmações:

- Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.
- Se $A \subset B$ e $C \subset D$ então $A \cup C \subset B \cup D$.

12 — Considere as seguintes afirmações

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Verifique a validade de cada uma delas,

- no caso particular em que

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

$$B = \{0, 2, 4, 6, 8\},$$

$$C = \{3, 4, 5, 6, 7\}.$$

- para quaisquer conjuntos A, B, C .

13 — Considere as seguintes afirmações (em que o complementar é relativo a algum conjunto universo fixado)

- $(A^c)^c = A$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $A^c \cap B = B \setminus A$
- $A \cup B^c = (B \setminus A)^c$

Verifique a validade de cada uma delas,

- no caso particular em que

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

$$B = \{0, 2, 4, 6, 8\},$$

$$\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

sendo \mathbb{U} o conjunto universo;

- para qualquer universo \mathbb{U} e quaisquer subconjuntos A, B desse universo.

14 — Dados A, B subconjuntos de um conjunto universo \mathbb{U} , mostre que

- $A \subset B$ se e somente se $A \cup B = B$
- $A \subset B^c$ se e somente se $A \cap B = \emptyset$

Exercícios Complementares

15 — Mostre que, para quaisquer conjuntos A, B, C , tem-se que

- Se $A \cap B = A \cap C$ e $A \cup B = A \cup C$ então $B = C$.
- Se $\wp(A) = \wp(B)$ então $A = B$.
- $A \setminus B \subset B$ se e somente se $A \setminus B = \emptyset$.

16 — Dados dois conjuntos A, B quaisquer,

- mostre que $\wp(A) \cap \wp(B) = \wp(A \cap B)$
- mostre que $\wp(A) \cup \wp(B) \subset \wp(A \cup B)$

17 — Dê um contra-exemplo para a inclusão

$$\wp(A \cup B) \subset \wp(A) \cup \wp(B)$$

18 — Suponha A, B, C conjuntos não vazios, com $B \cap C \neq \emptyset$. Mostre que:

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- Se $B \setminus C \neq \emptyset$, então $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

Respostas dos Exercícios

1 b.) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

d.) $\{2\}$

f.) $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16\}$

g.) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$

2 c.) $\{x \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 1\}$

e.) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ deixa resto } 1 \text{ na divisão por } 3\}$

f.) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é um quadrado perfeito}\}$

3 a.) $\{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$

c.) $\{3n + 2 \mid n \in \mathbb{Z} \text{ e } -1 \leq n \leq 3\}$

f.) $\{3n + 2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

4 a.) Enunciado na predicativa. Enumerativa:

$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. Construtiva: $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2\}$

b.) Enunciado na enumerativa. Predicativa:

$\{n \in \mathbb{N} \mid 4 \leq n \leq 25 \text{ e } n \text{ é um quadrado perfeito}\}$.

Construtiva: $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } 2 \leq n \leq 5\}$

c.) Enunciado na construtiva. Enumerativa:

$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Predicativa: $\{n \in$

$\mathbb{Z} \mid -2 \leq n \leq 8\}$

5 a.) V; b.) F; e.) F; f.) V

6 b.) $\{2, 3, 4\}$

d.) $\{5, 7\}$

f.) $\{1, 3, 4, 6, 8\}$

g.) $\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$

7 a.) $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$

c.) $A = \{1, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

8 a.) O conjunto à esquerda da inclusão é formado por todos os subconjuntos de \mathbb{N} que não possuem o número 1. Assim, a inclusão diz que todos os subconjuntos de \mathbb{N} que não possuem o número 1 são também elementos de $\wp(C)$ (isto é, subconjuntos de C).

b.) $C = \mathbb{N}$ ou $C = \mathbb{N} \setminus \{1\}$

9 b.) Isso ocorre se $1 \in A \setminus B$ ou $1 \in B \setminus A$

10 a.) Demonstração de que $A \cap A \subset A$: se $x \in A \cap A$ então $x \in A$ e $x \in A$, logo $x \in A$. Demonstração de que $A \subset A \cap A$: se $x \in A$ então $x \in A$ e $x \in A$, logo $x \in A \cap A$.

d.) Se $x \in A$ então $x \in A$ ou $x \in B$, logo $x \in A \cup B$.

g.) Pelo item c deste exercício, escolhendo $B = \emptyset$, resulta que $A \cap \emptyset \subset \emptyset$. Reciprocamente, sabe-se que $\emptyset \subset X$ para todo conjunto X , logo $\emptyset \subset A \cap \emptyset$.

11 a.) Se $x \in A$ então, como $A \subset B$, $x \in B$. Como por hipótese $B \subset C$, de $x \in B$ segue que $x \in C$. Como isso vale para qualquer x , resulta $A \subset C$.

12 b.) (i) A inclusão $A \subset (A \cap B)$ é imediata (veja Exercício 10, item d). Por outro lado, se $x \in A \cup (A \cap B)$, então $x \in A$ ou $x \in A \cap B$, e em qualquer um dos casos resulta $x \in A$.

13 b.) (ii) Temos que $x \in (A \cap B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cap B$ o que ocorre se e somente se $x \notin A$ ou $x \notin B$, ou seja, $x \in A^C$ ou $x \in B^C$, o que equivale a $x \in A^C \cup B^C$.

14 a.) $[\Rightarrow]$ Mostremos primeiro que $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$. Para isso, assumimos que $A \subset B$ e verificamos a igualdade $A \cup B = B$. A inclusão $B \subset A \cup B$ vale sempre. Por outro lado, dado $x \in A \cup B$ temos que $x \in A$ ou $x \in B$. Mas uma vez que $A \subset B$, resulta em qualquer caso $x \in B$. $[\Leftarrow]$ Mostremos agora que $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$, ou seja, assumimos que $A \cup B = B$ e provamos que $A \subset B$. Mas isto segue de $A \subset A \cup B$ e da hipótese de que $A \cup B = B$.

15 a.) *Dica:* Ao mostrar a inclusão $B \subset C$, considere, para cada $x \in B$, dois casos: $x \in A$ ou $x \notin A$. O mesmo para a outra inclusão.

b.) *Dica:* Ao comparar um elemento x de um conjunto ou do outro, considere o subconjunto unitário $\{x\}$.

c.) *Dica:* Se $A \setminus B$ não fosse vazio...

16 a.) Demonstraremos apenas uma das inclusões: $\wp(A) \cap \wp(B) \subset \wp(A \cap B)$. Se $C \in \wp(A) \cap \wp(B)$ então $C \in \wp(A)$ e $C \in \wp(B)$ e pela definição de conjunto potência, $C \subset A$ e $C \subset B$, logo se $c \in C$ temos que $c \in A$ e $c \in B$, ou seja $c \in A \cap B$, ou seja $C \subset A \cap B$, e logo $C \in \wp(A \cap B)$.

b.) Seja $C \in \wp(A) \cup \wp(B)$ então $C \subset A$ ou $C \subset B$. Desta forma se $c \in C$, então $c \in A$ ou $c \in B$, ou seja $c \in A \cup B$. Logo $C \subset A \cup B$, ou seja $C \in \wp(A \cup B)$.