Lista 6 - Bases Matemáticas (Última versão: 8/7/2017 - 13:30)

Funções - Parte 1

Conceitos Básicos e Generalidades

1 — Sejam dados A e B conjuntos não vazios.

a) Defina rigorosamente o conceito de função de A em B.

b) Defina rigorosamente os conceitos de função injetora, sobrejetora e bijetora.

2 — Dados os conjuntos $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, diga quais das relações abaixo definem uma função $f : A \to B$. Para cada uma destas, diga se é injetora, sobrejetora ou bijetora.

a) $R = \{(e, 1), (o, 2)\}$

b) $R = \{(a, 1), (e, 1), (i, 1), (o, 2), (u, 2)\}$

c) $R = \{(a, 1), (e, 2), (i, 3), (o, 4), (u, 5)\}$

d) $R = \{(a, 1), (e, 1), (e, 2), (i, 1), (u, 2), (u, 5)\}$

e) $R = \{(a, 3), (e, 3), (i, 3), (o, 3), (u, 3)\}$

f) $R = \{(a, 1), (e, 3), (i, 3), (o, 2), (u, 2)\}$

g) $R = \{(a, 2), (e, 1), (i, 4), (o, 5), (u, 3)\}$

3 — Determine o domínio maximal D das seguintes funções $f : D \to \mathbb{R}$, em que $D \subset \mathbb{R}$

a) $f(x) = \frac{1}{x(x+4)(3x+1)}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x^2-4)}}$

d) $f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x} - x}$

e) $f(x) = \sqrt{|1+x| - |x^2|}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt{|x| - 3}}$

4 — Determine o domínio maximal D das seguintes funções $f : D \to \mathbb{R}$, em que $D \subset \mathbb{N}$

a) $f(n) = \frac{1}{n(n+4)(3n+1)}$

b) $f(n) = \sqrt{|1+n| - |n^2|}$

5 — Para cada uma das seguintes funções, determine se são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras, justificando (i.e. provando ou dando contra-exemplos)

a) Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $f : A \to A$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par} \end{cases}$$

b) Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $g : A \to A$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \neq 7 \\ 1, & \text{se } x = 7 \end{cases}$$

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n + 1$.

d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n - |n|$.

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$.

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$.

g) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

h) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

i) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x, x)$.

k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x, |x|)$.

l) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - |y|$.

m) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x, y^3)$.

6 — Determine o conjunto imagem da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = (-1)^n n$.

7 — Considerando a função f do Exercício 6, determine o conjunto imagem da função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(n) = f(n) + f(n+1)$.

8 — Sejam dadas as seguintes funções

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n + 1$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - \left|(x+2)^2 - 1\right|$

(c) $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

Determine as pré-imagens abaixo

a) $f^{-1}(\{2\})$.

b) $f^{-1}(\{2k \mid k \in \mathbb{N}\})$.

c) $g^{-1}(\{-1\})$.

d) $g^{-1}([-3, -1])$.

e) $h^{-1}(\{1\})$.

f) $h^{-1}([\frac{1}{3}, \frac{1}{2}])$

Exercícios Complementares

9 — Seja dada uma função $f : A \to B$. Se X e Y são subconjuntos do domínio A e se V e W são subconjuntos do contradomínio B, mostre que

a) Se $X \subset Y$ então $f(X) \subset f(Y)$.

b) Se $V \subset W$ então $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)$.

c) $X \subset f^{-1}(f(X))$.

d) Se f é injetora então $X = f^{-1}(f(X))$.

10 — Com os mesmos dados do Exercício 9, mostre que

a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

b) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

c) Se f é injetora então $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

d) $f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$.

e) $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$.

11 — Considere a função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = y - |x|$.

a) Calcule $f^{-1}(\{0\})$

b) Calcule $f^{-1}((0, \infty))$

* **12** — Seja A um conjunto (não vazio) com n elementos e seja B um conjunto qualquer. Mostre cada uma das seguintes afirmações:

a) Se existe uma função injetora $f : A \to B$, então B possui *pelo menos* n elementos.

b) Se existe uma função sobrejetora $f : A \to B$, então B possui *no máximo* n elementos.

c) Conclua, das afirmações acima, a seguinte propriedade: dois conjuntos finitos possuem o mesmo número de elementos se, e somente se, existe uma função bijetora entre tais conjuntos.

Respostas dos Exercícios

2 c.) É função, bijetora;
d.) Não é função;
f.) É função, nem injetora, nem sobrejetora;

3 c.) $D = (-2, 0) \cup (2, +\infty)$;
d.) $D = \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$;
f.) $D = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

4 a.) $D = \mathbb{N}^*$;
b.) $D = \{0, 1\}$

5 a.) Nada;
b.) Bijetora;
c.) A função é injetora pois

$$f(n') = f(n) \Rightarrow 3n' + 1 = 3n + 1 \Rightarrow n = n'$$

Entretanto não é sobrejetora pois 5 pertence ao contradomínio, mas não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = 5$, pois $3n + 1 = 5 \Rightarrow 3n = 4$ e claramente não existe nenhum natural com essa propriedade.
d.) Nada;
e.) A função é injetora pois

$$f(x') = f(x) \Rightarrow ax + b = ax' + b \Rightarrow ax' = ax$$

e como $a \neq 0$, temos que $x = x'$. A função é sobrejetora pois dado $y \in \mathbb{R}$

$$f(x) = y \Leftrightarrow ax + b = y \Leftrightarrow x = \frac{y - b}{a}$$

ou seja, $f(\frac{y-b}{a}) = y$.
f.) Nada;
g.) Injetora;
h.) Nada;
i.) Injetora;
j.) A função não é sobrejetora, pois $(1, 0)$ pertence ao contradomínio mas não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = (1, 0)$. A função é injetora, pois $f(x) = f(x') \Rightarrow (x, x) = (x', x') \Rightarrow x = x'$
k.) Injetora;
l.) Sobrejetora. A função não é injetora pois $f((0, 1)) = 1 = f((0, -1))$.
m.) Bijetora

6 $\text{Im} f = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{-(2n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$

7 $\text{Im} f = \{-1, 1\}$

8 a.) $\varnothing$
b.) $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ é ímpar e múltiplo de $3\}$
c.) $\{-1\}$
d.) $[-3, 0]$
e.) $\{0\}$
f.) $[\frac{9}{16}, \frac{16}{9}]$

10 a.) Se $X \cup Y = \varnothing$, a afirmação é trivial. Caso contrário, seja $a \in f(X \cup Y)$. Então existe $b \in X \cup Y$ tal que $f(b) = a$. Como $b \in X$ ou $b \in Y$, então $a \in f(X)$ ou $a \in f(Y)$. Assim $f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$. Por outro lado, se $a \in f(X) \cup f(Y)$, então existe $b \in X$ ou $b \in Y$ tal que $f(b) = a$. Em qualquer um dos casos, existe $b \in X \cup Y$ tal que $f(b) = a$. Logo, $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.
c.) A inclusão $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ é objeto do item (b). Mostremos somente a inclusão $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. Se $f(X) \cap f(Y) = \varnothing$, a inclusão é trivial. Senão, seja dado $a \in f(X) \cap f(Y)$. Então existem $b \in X$ e $c \in Y$ tais que $f(b) = a$ e $f(c) = a$. Como a função f é injetora (hipótese do exercício), deve resultar $b = c$. Assim, $b \in X \cap Y$ e portanto $a \in f(X \cap Y)$.
e.) Se $V \cap W = \varnothing$, então a inclusão $f^{-1}(V \cap W) \subset f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$ é trivial. Senão, seja $x \in f^{-1}(V \cap W)$. Como $f(x) \in V \cap W$, então $f(x) \in V$ e $f(x) \in W$, e assim resulta $x \in f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$. Logo, vale $f^{-1}(V \cap W) \subset f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$. Vice-versa, se $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) = \varnothing$, a inclusão $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) \subset f^{-1}(V \cap W)$ é trivial. Senão, seja $x \in f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$. Então $f(x) \in V$ e $f(x) \in W$, ou seja, $f(x) \in V \cap W$. Logo, $x \in f^{-1}(V \cap W)$, o que prova a inclusão $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) \subset f^{-1}(V \cap W)$.

11 a.) $\{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\}$
b.) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > |x|\}$

12 Vamos provar as afirmações por indução sobre o número n de elementos do conjunto A. No que se segue, denotaremos o número de elementos de um conjunto X por $|X|$.
a.) $P(n)$: se um conjunto A tem n elementos e se existe uma função injetora $f : A \to B$, então o

conjunto B possui ao menos n elementos. Usaremos a *primeira versão* do PIF.
Se $n = 1$, então o conjunto B deve possuir ao menos a imagem de tal elemento. Logo $|B| \geq 1$ e $P(1)$ é verdadeira. Agora, assumamos que, para um certo natural $k \geq 1$, vale a propriedade $P(k)$, isto é: se $|A| = k$ e se existe uma função injetora $f : A \to B$, então $|B| \geq k$. Provemos que vale $P(k+1)$. Para isso, seja dado um conjunto de $k+1$ elementos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}$ e seja $f : A \to B$ uma função injetora. Considere os conjuntos $A' = A \backslash \{a_{k+1}\}$ e $B' = B \backslash \{f(a_{k+1})\}$ e tome a função $g : A' \to B'$ dada por $g(x) = f(x)$. Note que a função g está bem definida e ainda é injetora, pois f é injetora, e note que o conjunto A' tem k elementos. Pela hipótese indutiva, B' possui ao menos k elementos. Por como foi construído B', concluímos que B possui ao menos $k+1$ elementos, provando $P(k+1)$. Pelo PIF, $P(n)$ vale para todo $n \geq 1$.
b.) $P(n)$: se um conjunto A tem n elementos e se existe uma função sobrejetora $f : A \to B$, então o conjunto B possui no máximo n elementos. Usaremos a *segunda versão* do PIF.
Se $n = 1$, então $\operatorname{Im} f$ só pode conter um elemento. Como $\operatorname{Im} f = B$, resulta $|B| = 1$, logo $P(1)$ é verdadeira. Agora, assumamos que, fixado $n \in \mathbb{N}$, vale a propriedade $P(k)$ para todo $1 \leq k < n$, isto é: se $|A| = k < n$ (note que $|A| \geq 1$ pois $A \neq \varnothing$) e se existe uma função sobrejetora $f : A \to B$, então $|B| \leq k$. Provemos que vale $P(n)$. Para isso, seja A um conjunto de n elementos e seja $f : A \to B$ uma função sobrejetora. Escolha $b \in \operatorname{Im} f$ e considere os conjuntos $A' = A \backslash f^{-1}(\{b\})$ e $B' = B \backslash \{b\}$. Tome a função $g : A' \to B'$ dada por $g(x) = f(x)$. Note que a função g está bem definida e ainda é sobrejetora. Note, por fim, que o conjunto A' tem um número $k < n$ de elementos. Pela hipótese indutiva, $|B'| \leq k$. Como $|B| = |B'| + 1$ e $k < n$, então $|B| \leq n$, o que prova $P(n)$. Pelo PIF (segunda versão), a propriedade $P(n)$ vale para todo $n \geq 1$.