Lista 8
Bases Matemáticas

Funções Quadráticas, Exponenciais, Logarítmicas e Trigonométricas

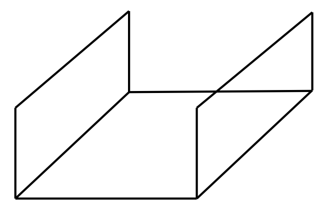
Funções Quadráticas

1 — Esboce o gráfico das seguintes funções, indicando em quais intervalos as funções são crescentes e decrescentes e encontrando as coordenadas dos pontos de máximo e/ou mínimo.

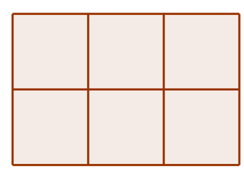
a) $f(x) = (x-4)^2 + 2$
b) $f(x) = (x-4)^2 - 2$
c) $f(x) = -(x+4)^2 + 2$
d) $f(x) = -(x+4)^2 - 2$
e) $f(x) = x^2 - 1$
f) $f(x) = x^2 - x$
g) $f(x) = 6 - 4x + x^2$
h) $f(x) = 2x^2 - 7x + 4$
i) $f(x) = x^2 + 1$
j) $f(x) = 3x^4 - 12x^2 - 1$

2 — Um fazendeiro pretende construir um chiqueiro retangular e para isso possui 100m de cerca. Ache as dimensões do chiqueiro de modo a maximizar a área do mesmo. Qual é essa área?

3 — Uma calha é feita dobrando uma folha de alumínio de 40cm de largura de modo que as laterais formem um ângulo reto com o fundo. Determine a profundidade da calha que maximiza o volume de água que a calha suporta.



4 — Um fazendeiro possui 2000m de cerca para construir 6 currais conforme mostrados na figura abaixo. Ache as dimensões que maximizam a área cercada. Determine essa área.



5 — Um projetil é lançado no ar. A função que descreve sua altura em relação ao solo em função do tempo é dada por:

$$h(t) = h_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

sendo h_0 a altura inicial, v_0 a velocidade inicial e g a força da gravidade (constate).

a) Em que instante de tempo a altura máxima é atingida?
b) Depois de quanto tempo o projetil atinge o solo?
c) Determine a altura máxima atingida pelo projetil se ele for lançado do solo.
d) Para um projetil lançado do solo, o que

acontece com sua altura se dobrarmos a velocidade inicial?

Exponencial

6 — Esboce o gráfico das seguintes funções, utilizando o gráfico de uma função mais simples e aplicando as transformações apropriadas. Para cada uma dessas funções indique as intersecções com os eixos x e y, as regiões nas quais as funções são positivas, negativas, crescentes, decrescentes e os pontos de máximo e mínimo local se existirem.

a) $2^{(x-\pi)}$

b) $3 \cdot 2^{(x-\pi)}$

c) $\frac{1}{2}^{(x+\pi)}$

d) $2^{(x-\pi)} - 5$

e) $5^{|x|}$

f) $5^{|x+2|}$

g) $\frac{1}{3}^{x+1} + 2$

h) $\frac{1}{3}^{|x|} - 2$

7 — Esboce o gráfico das funções $f(x)$ e $g(x)$ no mesmo sistemas de coordenadas cartesianas:

a) $f(x) = 3^x$ e $g(x) = 3^{-x}$

b) $f(x) = h^{-1}(x)$ com $h(x) = 3^x$ $g(x) = 3^{-x}$.

8 — A explosão da usina de Chernobil em 1986 lançou aproximadamente 1000 quilogramas do elemento radioativo césio 137 na atmosfera. Sabendo que o césio 137 possui uma meia vida de 30 anos, ou seja, a cada 30 anos a quantidade de césio 137 cai pela metade.

a) Escreva a função que descreve a massa de césio na atmosfera em função do tempo.

b) Determine em quanto tempo a massa de césio na atmosfera reduzirá a $1kg$.

Logaritmo

9 — Determine o domínio das seguintes funções:

a) $\log 1 + x^2$

b) $\log 1 - x^2$

c) $\log \frac{1+x}{x}$

d) $\log \cos(x)$

10 — Esboce os gráficos das seguintes funções:

a) $\log(x+1)$

b) $\log x^2$

c) $\log -x$

d) $\log |x|$

11 — Use as propriedades do logaritmo para expandir as expressões abaixo o máximo possível:

a) $\log_9 9x$

b) $\log_9 \frac{9}{x}$

c) $\log_4 \frac{64}{\sqrt{x+1}}$

d) $\log \sqrt[3]{\frac{x^2 y^3}{25}}$

e) $\log \frac{1000x^4 \sqrt[3]{(5-x)}}{3(x+4)^2}$

12 — Use as propriedades do logaritmo para condensar as expressões abaixo o máximo possível:

a) $\frac{1}{3}(\log_4(x) - \log_4(y))$

b) $\frac{4}{3}(\log_4(x) - 2\log_4(y))$

c) $4\log x + 7\log x + \log z$

d) $3\log(x) - \frac{1}{2}\log z$

e) $\frac{2}{3}(\log_4 x - \log_4 y) + 2\log_4(x+3)$

13 — Resolva as seguintes equações:

a) $10^x = 15$
b) $10^{x-3} = 100$
c) $2^{2x} + 2^x - 12 = 0$
d) $5^{2x+3} = 3^{x-1}$
e) $\log_5(x-7) = 2$
f) $\log_3(x-4) = -3$
g) $\log_6(x+5) + \log_6(x) = 2$
h) $\log_2(\sqrt{x+3}) = 1$
i) $\log_2(x-3) + \log_2(x) - \log_2(x+2) = 2$

Funções Trigonométricas

14 — Determine o domínio das seguintes funções:

a) $\operatorname{tg}(1-x)$
b) $\frac{1}{\cos(x)}$
c) $\arccos \frac{2x}{1+x}$
d) $3\,|\cos|x| - 1|$

15 — Esboce os gráficos das seguintes funções:

a) $\cos 3x$
b) $2\operatorname{sen}(3x+\pi)$
c) $\operatorname{sen}(x) + x$
d) $\operatorname{tg}(|x|)$
e) $x\operatorname{sen}(x)$

16 — Calcule

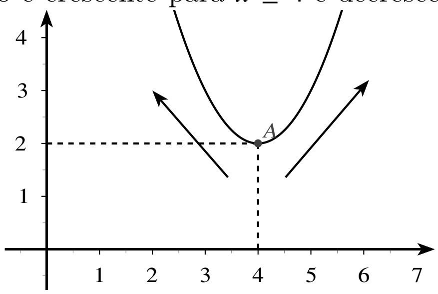
a) $\operatorname{sen}(a)$ sabendo que $\cos(a) = b$ e $0 \leq a \leq \pi/2$
b) $\operatorname{sen}(a)$ sabendo que $\operatorname{tg}(a) = b/c$ e $0 \leq a \leq \pi/2$
c) $\operatorname{sen}(a)$ sabendo que $\operatorname{tg}(a) = b/c$ e $\pi/2 \leq a \leq \pi$
d) $\operatorname{arcsen}(a)$ sabendo que $\operatorname{tg}(a) = b/c$ e $0 \leq a \leq \pi/2$
e) $\operatorname{cotg}(a)$ sabendo que $\operatorname{sen}(a) = b/c$ e $0 \leq a \leq \pi/2$

17 — Calcule

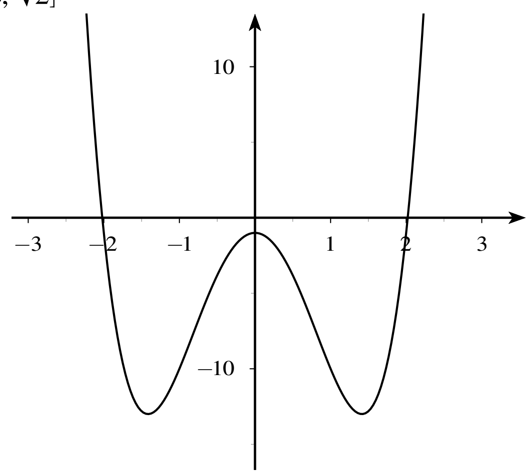
a) $\operatorname{arcsen}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$
b) $\arctan(1) - \arctan(-1)$
c) $\operatorname{arcsen}(\cos(2x))$ $0 \leq x \leq \pi/2$
d) $\operatorname{arcsen}(\cos(2x))$ $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$

Respostas dos Exercícios

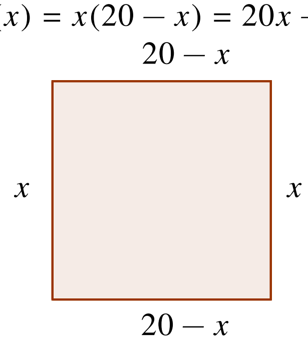
1 a.) Coordenadas do ponto de mínimo $(4, 2)$. A função é crescente para $x \geq 4$ e decrescente para $x \leq 4$



j.) Dica: Faça a substituição $t = x^2$ para encontrar as raízes e os pontos de máximo e mínimo. Raízes: $-2, 2$ Pontos de mínimo: $(-\sqrt{2}, -13)$ e $(\sqrt{2}, -13)$. Decrescente para $x \leq -\sqrt{2}$ e $x \in [0, \sqrt{2}]$



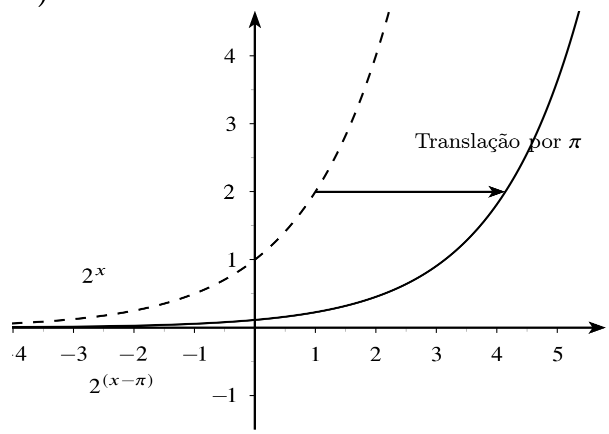
2 A área do chiqueiro é dada pela função $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$



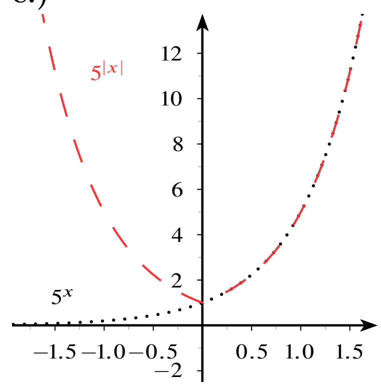
A coordenada x do vértice da parábola é $-b/2a$. Logo o máximo ocorre quando $x = 10$ e nesse caso o chiqueiro é um quadrado de área 100

5 a.)A altura máxima é atingida no tempo $t = -v_0/g$ **b.)**Dica: procure a maior raiz da equação quadrática **c.)**Nesse caso $h_0 = 0$

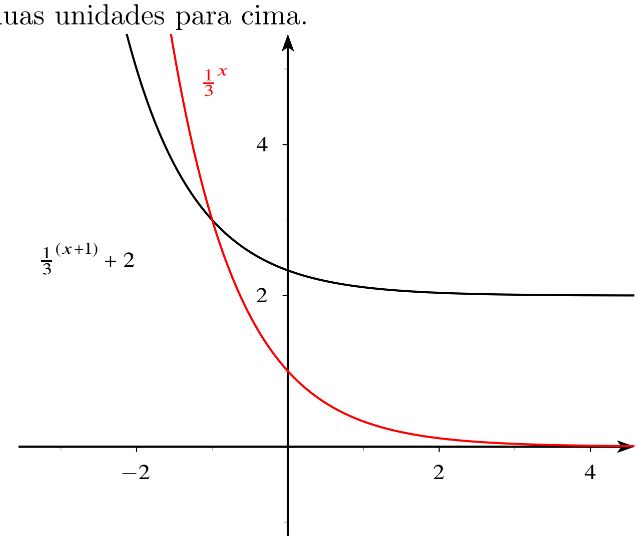
6 a.)



e.)



g.)O gráfico de $\frac{1}{3}^{(x+1)} + 2$ é obtido transladando o gráfico de $\frac{1}{3}^x$ uma unidade para a esquerda e duas unidades para cima.



9 a.)$\mathbb{R}$ **b.)**$-1 < x < 1$ **c.)**$x < -1$ ou $x > 0$ **d.)**O domínio é a união dos intervalos da forma $[-\pi/2 + 2 * k * \pi, \pi/2 + 2 * k * \pi]$ com $k \in \mathbb{N}$.

10 b.) Dica: $\log x^2 = 2 \log x$.

11 **a.)**$1+\log_9 x$ **b.)**$1-\log_9 x$ **d.)**$\log(y)+\frac{2\log(x)}{3}-\frac{2\log(5)}{3}$

12 **a.)**$\log_4\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}$

13 **a.)**$\log_{10} 15$ **b.)**5 **c.)**Dica: faça $t=2^x$. **d.)**

14

$\mathbb{R}\backslash\{1-\pi/2+k\pi\}$ com $k\in\mathbb{N}$