Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Bases Matemáticas (2018) – 3^o Quadrimestre

10 de novembro de 2018 — 12:00-14:00 (Auditório A - 101-0)

Observações:

- Esta lista corresponde a um conjunto de exercícios recomendados pela Coordenação de Bases Matemáticas, como complemento à **Lista 7** & **Lista 8** do **GRADMAT de Bases Matemáticas**[1].
- Apenas alguns dos exercícios serão resolvidos nesta aula. Eventuais dúvidas que surjam na resolução dos restantes deverão ser sanadas junto do seu professor de Bases Matemáticas.

Comecemos por revisar o Exercício 12. da Lista 7 & do Exercício 1. da Lista 8 do GRADMAT de Bases Matemáticas:

1. Considere o polinômio de grau 2, dado por $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.
   (a) Esboce o gráfico de f, indicando os zeros, e em quais intervalos a função é crescente e decrescente.
   (b) Use o estudo do gráfico de f para determinar o domínio, assim como os máximos e/ou mínimos das funções abaixo:
      i. $\dfrac{1}{|-x^2 + 4x - 3|}$
      ii. $\sqrt{-x^2 + 4x - 3}$
      iii. $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$
      iv. $\log_3(-x^2 + 4x - 3)$

[1] URL: http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/bm/listas/

O próximo exercício corresponde a uma extensão do Exercício 2 da Lista 7 do GRAD-MAT de Bases Matemáticas:

2. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas funções bijetoras.

   (a) Mostre que a função $h : C \to A$ definida por $h = f^{-1} o g^{-1}$ é a inversa de $g o f$.

   (b) Verifique que $g^{-1} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, definida por $g^{-1}(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$ é a inversa da função $g : \mathbb{R} \to]-1, 1[$, definida por $g(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$.

   (c) Para a função $g(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$, determine a inversa de $g o f$ para o caso em que a função f é dada por:

      i. $5 - 7x$
      ii. $\sqrt{5 - 7x}$
      iii. $\log_4(5 - 7x)$
      iv. $\sin(x)$
      v. $\tan(x)$

Este exercício é muito semelhante ao Exercício 13. da Lista 7. Nele se pretende que você revise, em paralelo o que aprendeu sobre funções modulares e sobre a resolução de equações e inequações:

3. Considere a função modular $f(x) = |4 - x| - |x^2 - 2|$.

   (a) Escreva a função f como uma função por partes (i.e. sem usar módulos).

   (b) Determine os zeros de f e os máximos/mínimos de f caso existam.

   (c) Resolva a inequação $f(x) < 0$.

   (d) Use agora os itens anteriores para determinar o domínio das funções abaixo:

      i. $\sqrt{|x^2 - 2| - |4 - x|}$
      ii. $\log_3(|x^2 - 2| - |4 - x|)$
      iii. $\cot(|x^2 - 2| - |4 - x|)$

Vamos agora testar tudo o que você sabe sobre funções exponenciais e logarítmicas. Comecemos por estudar a função sigmóide:

4. A *função sigmóide de base* 2 é a função definida por $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{-x}}$.

   (a) Determine f^{-1}, explicitando qual o seu domínio e contradomínio.

   (b) Com base no item anterior diga, justificando, qual o contradomínio de f.

   (c) Mostre que $\dfrac{1 - 4^{-x}}{1 + 4^{-x}} = 2f(2x) - 1$.

Teste novamente o seu conhecimento sobre funções exponenciais e logarítmicas. E aproveite para revisar ao longo do exercício o que você estudou sobre inequações envolvendo raízes:

5. Considere as funções $f(x) = \log_5(x + \sqrt{x^2 - 1})$ e $g(x) = \log_5(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

   (a) Determine o domínio de f.

   (b) Mostre que a igualdade $f(2x^2 - 1) = 2g(x)$ é satisfeita. O que pode concluir sobre o domínio de g?

   (c) Mostre que g é uma função ímpar.

   DICA: Use as propriedades dos logaritmos para calcular a soma $g(x) + g(-x)$.

Antes de passarmos ao estudo de funções trigonométricas, vamos ver se você assimilou os conceitos abordados nos exercícios 4. & 5. desta lista:

6. Use a função sigmóide $\dfrac{1}{1+2^{-x}}$ para achar a função inversa de $\dfrac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$, indicando qual o seu domínio e contradomínio.

   DICA: Multiplique e divida ambos os membros da fração $\dfrac{1-4^{-x}}{1+4^{-x}}$ por 2^x.

7. Mostre que $\dfrac{5^x + 5^{-x}}{2}$ é a inversa da função $\log_5(x + \sqrt{x^2 - 1})$ e que $\dfrac{5^x - 5^{-x}}{2}$ é a inversa da função $\log_5(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

   DICA: Aplique o exercício 2 da Lista 7.

8. Mostre que para $y = \log_2(5^x)$ se tem a igualdade

$$\frac{\dfrac{5^x - 5^{-x}}{2}}{\dfrac{5^x + 5^{-x}}{2}} = \frac{2}{1 + 2^{-2y}} - 1.$$

Na próxima sequência de exercícios pretende-se que faça uso das seguintes identidades trigonométricas abaixo. Em paralelo, procure resolver os Exercícios 16. & 17. da Lista 8 do GRADMAT:

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1, \quad \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta) \quad \& \ \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta).$$

9. Comece por calcular os valores exatos das expressões abaixo:

   (a) $\sin\left(2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{7}}{7}\right)\right)$

   (b) $\sin\left(2\arccos\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)\right)$

(c) $\sin\left(2\arctan\left(-\frac{\sqrt{7}}{7}\right)\right)$.

(d) $\cos\left(2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{7}}{7}\right)\right)$

(e) $\cos\left(2\arccos\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)\right)$

(f) $\cos\left(2\arctan\left(-\frac{\sqrt{7}}{7}\right)\right)$.

10. Faça agora uso das identidades trigonométricas $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ & $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ para:

    (a) Mostrar que $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{12}\sqrt{23+4\sqrt{30}}$.

    (b) Calcular, de modo análogo, o valor exato $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

    (c) Mostrar que $\sin(2\arcsin(x) + \arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, para todo o $-1 \leq x \leq 1$.

    (d) Calcular o valor exato de $\tan\left(2\arcsin\left(\frac{-\sqrt{5}}{5}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right)$.

    Vejamos agora se você consegue extrapolar o que revisou sobre funções trigonométricas para estudar conceitos associados a funções periódicas:

11. Determine o período fundamental das funções $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ & $\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{3}x\right)$.

12. Com base nas igualdades abaixo

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta),\ \cos(-\theta) = \cos(\theta)\ \&\ \cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$$

    (a) Prove que $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ & $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ são funções ímpares.

    (b) Prove que $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ satisfaz a igualdade

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x).$$

    O que pode concluir quanto à paridade da função $\arccos$?

13. Suponha que as funções f & g satisfazem as seguintes igualdades:

$$7f(x)^2 + g(x) = 2 \quad \& \quad 7f(x)^2 - g(x) = 2\cot^2\left(\frac{\pi}{3}x\right).$$

    (a) Determine $f(x)^2$. O que pode afirmar quanto ao domínio de f?

    (b) Mostre que $|f(x)| \geq \frac{\sqrt{7}}{7}$.

    (c) Sendo A o domínio de f, o que pode afirmar quanto à sobrejetividade de $f : A \to \mathbb{R}$?

    (d) Mostre que $g(x) = -2\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{3}x\right)$. Quais os zeros da função g?

    (e) Use o item anterior para calcular o valor de $g(x)$ no ponto $x = \frac{3}{\pi}\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

No próximo exercício pretende-se que você identifique a função abaixo como a composição de duas funções (à semelhança do que é pedido no Exercício 10 da Lista 7 do GRAD-MAT de Bases Matemáticas), e que faça uso do que aprendeu no exercício 2. desta lista:

14. Considere a função h definida por $h(x) = \cos\left(\dfrac{1+7x}{7-x}\right)$.

    (a) Determine o domínio de h.

    (b) Escreva a função h como a composição de duas funções f e g, respetivamente.

    (c) Determine a inversa da função h.

    (d) Determine os zeros de h.

    (e) Determine os pontos do domínio de h, para os quais a função h atinge o seu máximo/mínimo.

Antes de terminarmos, vamos testar se você é mesmo um especialista em funções trigonométricas e suas inversas:

15. Com base no estudo dos zeros da função $\cos\left(\dfrac{1+7x}{7-x}\right)$ diga, justificando, se esta função é periódica.

    DICA: Para ter uma intuição sobre a resposta, represente o gráfico da função `f(x)=cos((1+7x)/(7-x))` usando o app de GeoGebra – `https://www.geogebra.org/graphing`.

16. *Se consideramos a substituição* $\theta = \arcsin(x)$ *na equação* $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$, *podemos deduzir com base na inversa da função* $\cos$ *que*

    $$2\arcsin(x) = \arccos(1 - 2x^2).$$

    No entanto $\arcsin(x)$ *define uma função ímpar e* $\arccos(1-2x^2)$ *define uma função par, e funções pares e ímpares nunca podem ser iguais.*

    Será que os gráficos de $\arcsin(x)$ e $\arccos(1-2x^2)$ coincidem mesmo?

    Se sim, em que intervalo $I \subseteq [-1, 1]$?

    DICA: Represente o gráfico da funções do exercício usando novamente o app de GeoGebra – `https://www.geogebra.org/graphing`.

3º Quadrimestre 2018

Versão de 25 de novembro de 2018