Bases Matemáticas - Lista 2

Demonstrações

Notação: Dados dois inteiros a, b, a notação $a \mid b$ significa que a é divisor de b (ou, equivalentemente, b é múltiplo de a), isto é, $b = ka$ para algum inteiro k.

Parte I

1 — Considerando o domínio de discurso $\mathbb{U} = \mathbb{Z}$, determine se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta, demonstrando a afirmação ou sua negação, dependendo do caso.

a) $\forall n\ (\exists m\ (n = m))$
b) $\exists m\ (\forall n\ (n = m))$
c) $\forall n\ (\exists m\ (n + m = 2))$
d) $\exists m\ (\forall n\ (n + m = 2))$
e) $\forall n\ (\exists m\ (nm = 0))$
f) $\exists m\ (\forall n\ (nm = 0))$
g) $\forall n\ (\exists m\ (n + m)$ é par$))$
h) $\exists m\ (\forall n\ (n + m)$ é par$))$

2 — Considerando o domínio de discurso $\mathbb{U} = \mathbb{N}$, determine o valor verdade de cada proposição abaixo:

a) $\forall n\ \exists m > 1\ :$
$(m \neq n \wedge m \mid n) \Rightarrow n$ não é primo
b) $\forall a\ \forall b\ \forall c$
$a \mid bc \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$

Parte II

3 — Para demonstrar pelo método direto que *Para todo n inteiro, se n é par, então n^2 é par*, devemos:

a) Assumir que n é par e n^2 é par e verificar que isso não leva a contradição
b) Mostrar que o quadrado de um número par é sempre um número par
c) Assumir que n^2 é par e mostrar que n é par
d) Mostrar que n^2 não poderia ser ímpar, pois nesse caso n seria ímpar
e) Assumir que n é par e mostrar que n^2 é par

4 — Para demonstrar pelo método contrapositivo que *Para todo n inteiro, se n é par, então n^2 é par*, devemos:

a) Assumir que n^2 é ímpar e mostrar que n é ímpar
b) Assumir que n é ímpar e mostrar que n^2 é ímpar
c) Assumir que n é par e n^2 é ímpar e mostrar que isso leva a contradição
d) Assumir que n^2 é ímpar e mostrar que isso leva a contradição
e) Mostrar que o quadrado de um número par é sempre um número par

5 — Para demonstrar pelo método de redução ao absurdo que *Para todo n inteiro, se n é par, então n^2 é par*, devemos:

a) Mostrar que n^2 não poderia ser ímpar, pois nesse caso n seria ímpar

b) Assumir que n^2 é ímpar e mostrar que isso leva a contradição

c) Assumir que n é par e n^2 é ímpar e verificar que isso leva a contradição

d) Assumir que n^2 é par e mostrar que n é par

e) Assumir que n^2 é ímpar e mostrar que n é ímpar

Nos exercícios de 6 a 10, diga que tipo de técnica de demonstração foi usada para provar a proposição e explique como a técnica foi aplicada.

6 — *Proposição:* $a \mid b$ ***e*** $a \mid c \Rightarrow a \mid (b+c)$***.*** *Prova:* Como $a \mid b, \exists k_1 : ak_1 = b$; e como $a \mid c$, $\exists k_2 : ak_2 = c$. Assim, $b + c = ak_1 + ak_2 = a(k_1+k_2)$, o que significa que existe k ($k = k_1+k_2$) tal que $b + c = ak$, ou seja, $a \mid (b + c)$. □

7 — *Proposição:* $\log_2 3$ ***é irracional.*** *Prova:* Suponha que existam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $\log_2 3 = a/b$. Assim, $2^{a/b} = 3$ e $(2^{a/b})^b = 3^b$. Como $(2^{a/b})^b = 2$, teríamos $2^a = 3^b$. Mas 2 elevado a qualquer inteiro deve ser par, e 3 elevado a qualquer inteiro deve ser ímpar. Como um número não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo, temos que concluir que $\log_2 3$ é irracional. □

8 — *Proposição: Se* a ***é irracional, então*** $\sqrt{a}$ ***também é irracional.*** *Prova:* Se $\sqrt{a}$ for racional, então existem inteiros m e n tais que $\sqrt{a} = m/n$. Elevando ambos os lados ao quadrado, temos $a = m^2/n^2$. Como m^2 e n^2 são inteiros, a é racional. □

9 — *Proposição: Se* a ***e*** b ***são números reais tais que*** ab ***é irracional, então pelo menos um dentre*** a ***e*** b ***deve ser irracional.*** *Prova:* Se tanto a como b fossem racionais, então existiriam $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = k_1/k_2$ e $b = k_3/k_4$. Então, $ab = (k_1/k_2)(k_3/k_4) = \frac{(k_1k_3)}{(k_2k_4)}$ – o que significa que ab poderia ser escrito como quociente de dois inteiros, sendo assim racional. Portanto, se ab é irracional, ou a ou b deve ser irracional. □

10 — *Proposição: A soma das medidas dos catetos de um triângulo retângulo é maior do que a medida da hipotenusa.* *Prova:* Suponha que exista um triângulo retângulo tal que $a + b \leq c$, em que a e b são os comprimentos de seus catetos e c o comprimento de sua hipotenusa. Tendo em mente que as medidas dos lados são todas positivas, podemos elevar ambos os lados ao quadrado e obter que $(a+b)^2 \leq c^2$, ou ainda, $a^2 + 2ab + b^2 \leq c^2$. E sendo $ab > 0$, resulta $a^2 + b^2 < a^2 + 2ab + b^2 \leq c^2$, e portanto $a^2 + b^2 < c^2$. No entanto, o Teorema de Pitágoras afirma que $a^2 + b^2 = c^2$, e a prova está completa. □

Parte III

11 — Considere a seguinte *Proposição:* Se a e b são inteiros tais que a é par e b é ímpar, então $a + b$ é ímpar.

a) Identifique o erro na demonstração a seguir. *Demonstração:* Como a é par, então $a = 2k$ para algum inteiro k. Logo $a + b = 2k + b$ e, se este número é ímpar, então existe um inteiro k' tal que $a + b = 2k' + 1$, isto é, $2k + b = 2k' + 1$. Assim, $b = 2k' + 1 - 2k = 2 \cdot (k' - k) + 1$, que é ímpar pois $k' - k$ é um inteiro.

b) O fato de que o argumento utilizado na "demonstração"acima não é válido nos permite concluir que a proposição é falsa?

Nos exercícios de 12 a 16, as demonstrações apresentadas estão incorretas. Aponte o erro em cada uma delas.

12 — $1 < 0$.
Prova: Seja um número real $x < 1$. Aplicando o logaritmo em ambos os lados da desigualdade, temos $\log x < \log 1$. Como sabemos que $\log 1 = 0$, então $\log x < 0$. Agora dividimos ambos os lados por $\log x$ e obtemos $1 < 0$. ☠

13 — *Todo número inteiro tem raiz quadrada inteira.*

Prova: Provemos a contrapositiva de “ Se $n \in \mathbb{Z}$, então $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$”. Seja $a = \sqrt{n}$. Temos que $a^2 = n$, e como o quadrado de um inteiro é sempre outro inteiro, n também é inteiro. ☠

14 — *Se* $5|ab$ *então* $5|a$ *ou* $5|b$.
Prova: Se $5|ab$ então ab é da forma $5k$ para algum k. Portanto, ou $a = 5m$ ou $b = 5m$ para algum m. Assim, concluímos que $5|a$ ou $5|b$. ☠

15 — $\forall\, a, b$, *se* $a + b < 0$, *então* $a < 0$
Prova: Como $a + b < 0$, então $a < -b$. E sendo $-b < 0$, segue que $a < -b < 0$, concluindo que a é negativo. ☠

16 — $1 = 2$.
Prova: Sejam a e b dois números iguais. Multiplicando ambos os lados de “$a = b$” por a obtemos $a^2 = ab$. Subtraindo b^2 dos dois lados, $a^2 - b^2 = ab - b^2$. Fatorando, $(a + b)(a - b) = b(a - b)$. Cancelando $(a - b)$ temos $a + b = b$. Quando a e b valem 1, temos que $1 + 1 = 1$, e está concluída a prova. ☠

Parte IV

17 — Prove que, se a, b e d são inteiros tais que $d|a$ e $d|b$, então, para quaisquer inteiros m e n, tem-se que $d \mid am - bn$.

18 — Dado um inteiro n, prove que n^3 é ímpar se, e somente se, n é ímpar.

19 — Sejam a um número racional e b um número irracional. Prove que, se $a \cdot b$ é racional, então $a = 0$.

20 — Prove que $\sqrt{3}$ é irracional.

21 — Demonstre que se p, q são números racionais, então $p + q$ é um número racional.

22 — Use o método de redução ao absurdo para provar cada uma das seguintes proposições.

a) A raiz cúbica de 2 é irracional.
b) Dados a, b, c inteiros, se a não divide bc, então a não divide b.

23 — Prove pelo método contra-positivo: Se x e y são dois números inteiros cujo produto é ímpar, então ambos têm de ser impares.

24 — Mostre que o produto de um número racional não nulo com um número irracional é irracional.

25 — Dados a, b, c números inteiros com $c \neq 0$, mostre que a divide b se e somente se ac divide bc.

Exercícios Complementares

26 — Use o método de redução ao absurdo para provar cada uma das seguintes proposições

a) Não há soluções inteiras positivas para a equação $x^2 - y^2 = 10$
b) Não há solução racional para a equação $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0$

Respostas dos Exercícios

1 a.) V
d.) F
f.) V
g.) V

2 b.) F

3 (e)

5 (c)

6 Prova direta. Assume-se que a hipótese é verdadeira e prova-se, manipulando algebricamente os dados, que a tese é verdadeira.

7 Redução ao absurdo. A prova consiste em demonstrar que a negação da tese (isto é, supor que $\log_2 3$ é racional) leva a uma contradição.

9 Contrapositiva. A prova consiste em assumir que o consequente é falso (isto é, supor que a e b são racionais) e demonstrar que o antecedente também é falso (isto é, que ab é racional).

12 A própria demonstração diz que $\log x < \log 1$, isto é $\log x < 0$. No entanto, ao multiplicar ou dividir uma inequação $a < b$ por algum número negativo k, tem-se que $ak > bk$ ou $a/k > b/k$ (isto é, o sinal de ordem deveria ter sido invertido).

13 A proposição provada não é a contrapositiva do que se queria provar, e sim a recíproca.

14 A proposição é "Se $5|ab$ então $5|a$ ou $5|b$", e foi usada para provar a si mesma: "ab é da forma $5k \dots$ Portanto ou $a = 5m$ ou $b = 5m$ para algum m". *Em tempo:* a proposição em si é verdadeira, é a demonstração que está errada.

16 Se $a = b$, então $a - b = 0$. Nesse caso, não podemos cancelar o fator $(a - b)$ como fizemos.