Bases Matemáticas - Lista 3 A

Conjuntos

Parte I

1 — Descreva os conjuntos abaixo na forma enumerativa:

a) $\{x \in \mathbb{N} \,|\, 1 < x < 10\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 < 5\}$

c) $\{x \in \mathbb{N} \,|\, 3x + 4 \leq 10\}$

d) $\{x \in \mathbb{N} \,|\, x^2 + x - 6 = 0\}$

e) $\{4n + 1 \,|\, n \in \mathbb{N} \text{ e } n < 5\}$

f) $\{2n + 3m \,|\, n, m \in \mathbb{N}, n < 3 \text{ e } m \leq 4\}$

g) $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N} \text{ e } 2 \leq n\}$

2 — Descreva os conjuntos abaixo na forma predicativa (atenção, as respostas ao final da lista não são as únicas possíveis):

a) $\{0, 1, 2, 3\}$

b) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

c) $\{-1, 1\}$

d) $\{2n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

e) $\{3n + 1 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

f) $\{n^2 \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$

3 — Descreva os conjuntos abaixo na forma construtiva (atenção, as respostas ao final da lista não são necessariamente as únicas possíveis, embora sejam de certo modo 'naturais'):

a) $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

b) $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$

c) $\{-1, 2, 5, 8, 11\}$

d) $\{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

e) $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ é divisível por } 3\}$

f) $\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \text{ tem resto 2 na divisão por } 3\}$

4 — Identifique em qual formato cada conjunto abaixo está descrito e descreva-os nos outros dois formatos:

a) $\{x \in \mathbb{Q} \,|\, \frac{1}{x} \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq \frac{1}{2}\}$

b) $\{4, 9, 16, 25\}$

c) $\{n + 1 \,|\, n \in \mathbb{Z}, -3 \leq n \leq 7\}$

5 — Sejam dados os conjuntos $X = \{0\}$, $Y = \{0, 1\}$ e $Z = \{\{0\}, 1\}$. Determine qse são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo

a) $X \in Z$

b) $X \subset Z$

c) $X \cap Z \neq \varnothing$

d) $X \cap Y \neq \varnothing$

e) $Y \subset Z$

f) $\wp(X) \cap Z \neq \varnothing$

6 — Considere os seguintes subconjuntos do conjunto universo $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4\} \\ B &= \{x \in \mathbb{U} : (x-2)^2(x-3) = 0\} \\ C &= \{x \in \mathbb{U} : x \text{ é par}\} \end{aligned}$$

Para esses subconjuntos determine:

a) $A \cup B$

b) $A \cap (B \cup C)$

c) $C \cup A^{\mathrm{C}}$

d) $(A \cup C)^c$
e) $A^c \cap C^c$
f) $(A \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash A)$
g) $\wp(B)$

7 — Em cada item, dê exemplos de conjuntos A, B, C satisfazendo a igualdade abaixo

$$(A \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash A) = \{1, 2, 3\}$$

a) Cada conjunto contém um único elemento
b) Cada conjunto contém dois elementos
c) Cada conjunto contém mais de dois elementos

8 — Seja C um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

$$\{X \subset \mathbb{N} \,|\, 1 \notin X\} \subset \wp(C)$$

a) Interprete a inclusão: Quais são os subconjuntos de $\mathbb{N}$ que pertencem a $\wp(C)$?
b) Determine todas as possibilidades para o conjunto C.

9 — Dado um conjunto (universo) $\mathbb{U}$, alguns fatos são conhecidos a respeito de alguns de seus subconjuntos A, B, X, Y, Z[1]:

- $\mathbb{U} = A \cup B$
- $A \cap B = \varnothing$
- $\mathbb{U} = X \cup Y \cup Z$
- $X \cap Y = X \cap Z = Y \cap Z = \varnothing$

Além disso, há um subconjunto $T \subset \mathbb{U}$ tal que

1. $A \subset T$
2. $X \cup Y \subset T^c$

Para cada uma das afirmações abaixo, diga se é necessariamente verdadeira?

a) $T^c \subset B$
b) $B \subset T^c$
c) $Z \subset T$
d) $T \subset Z$
e) $A \cap X = \varnothing$
f) $A \subset Z$
g) $Z \subset A$
h) $B \subset Y$
i) $Y \subset B$

10 — Sejam A, B subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que

$$\wp(A) \cap \wp(B) = \{X \subset \mathbb{N} \,|\, 1 \notin X\}.$$

Determine condições sobre A e B de modo que

a) $A = B$
b) $A \neq B$

Parte II

11 — Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Prove as seguintes afirmações

a) $A \cap A = A$
b) $A \cup A = A$
c) $A \cap B \subset B$
d) $A \subset A \cup B$
e) $A \cap B \subset A \cup B$
f) $A \cup \varnothing = A$
g) $A \cap \varnothing = \varnothing$

12 — Considere as seguintes afirmações

$$\begin{array}{rrcl} (i) & A \cup (A \cap B) & = & A \\ (ii) & A \cup (B \cap C) & = & (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ (iii) & A \cap (B \cup C) & = & (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array}$$

Verifique a validade de cada uma delas,

a) no caso particular em que

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{0, 1, 2, 3, 4\}, \\ B & = & \{0, 2, 4, 6, 8\}, \\ C & = & \{3, 4, 5, 6, 7\}. \end{array}$$

b) para quaisquer conjuntos A, B, C.

13 — Dados A, B, C, D conjuntos quaisquer, prove as seguintes afirmações:

a) Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

[1] Esse exercício é uma versão, em linguagem de conjuntos, do exercício ”dos ETs” da Lista 2.1 (aquele sobre habitantes HI e HO de um planeta distante...). Pode ser interessante fazer comparações entre as duas versões.

b) Se $A \subset B$ e $C \subset D$ então $A \cup C \subset B \cup D$.

Exercícios Complementares

14 — Considere as seguintes afirmações (em que o complementar é relativo a algum conjunto universo fixado)

$$\begin{array}{rrcl} (i) & (A^{\mathrm{C}})^{\mathrm{C}} & = & A \\ (ii) & (A \cap B)^{\mathrm{C}} & = & A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}} \\ (iii) & (A \cup B)^{\mathrm{C}} & = & A^{\mathrm{C}} \cap B^{\mathrm{C}} \\ (iv) & A^{\mathrm{C}} \cap B & = & B \backslash A \\ (v) & A \cup B^{\mathrm{C}} & = & (B \backslash A)^{\mathrm{C}} \end{array}$$

Verifique a validade de cada uma delas,

a) no caso particular em que

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{0, 1, 2, 3, 4\}, \\ B & = & \{0, 2, 4, 6, 8\}, \\ \mathbb{U} & = & \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \\ & & \text{sendo } \mathbb{U} \text{ o conjunto universo;} \end{array}$$

b) para qualquer universo $\mathbb{U}$ e quaisquer subconjuntos A, B desse universo.

15 — Dados A, B subconjuntos de um conjunto universo $\mathbb{U}$, mostre que

a) $A \subset B$ se e somente se $A \cup B = B$

b) $A \subset B^{\mathrm{C}}$ se e somente se $A \cap B = \varnothing$

16 — Mostre que, para quaisquer conjuntos A, B, C, tem-se que

a) Se $A \cap B = A \cap C$ e $A \cup B = A \cup C$ então $B = C$.

b) Se $\wp(A) = \wp(B)$ então $A = B$.

c) $A \backslash B \subset B$ se e somente se $A \backslash B = \varnothing$.

17 — Dados dois conjuntos A, B quaisquer,

a) mostre que $\wp(A) \cap \wp(B) = \wp(A \cap B)$

b) mostre que $\wp(A) \cup \wp(B) \subset \wp(A \cup B)$

18 — Dê um contra-exemplo para a inclusão

$$\wp(A \cup B) \subset \wp(A) \cup \wp(B)$$

19 — Suponha A, B, C conjuntos não vazios, com $B \cap C \neq \varnothing$. Mostre que:

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

c) Se $B \backslash C \neq \varnothing$, então $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$

Respostas dos Exercícios

1 b.) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
d.) $\{2\}$
f.) $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16\}$
g.) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$

2 c.) $\{x \in \mathbb{Z} \,|\, n^2 = 1\}$
e.) $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n$ deixa resto 1 na divisão por 3 $\}$
f.) $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n$ é um quadrado perfeito$\}$

3 a.) $\{2n + 1 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$
c.) $\{3n + 2 \,|\, n \in \mathbb{Z}$ e $-1 \leq n \leq 3\}$
f.) $\{3n + 2 \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$

4 a.) Enunciado na predicativa. Enumerativa: $\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dots\}$. Construtiva: $\{\dfrac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2\}$
b.) Enunciado na enumerativa. Predicativa: $\{n \in \mathbb{N} \,|\, 4 \leq n \leq 25$ e n é um quadrado perfeito$\}$. Construtiva: $\{n^2 \,|\, n \in \mathbb{N}$ e $2 \leq n \leq 5\}$
c.) Enunciado na construtiva. Enumerativa: $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Predicativa: $\{n \in \mathbb{Z} \,|\, -2 \leq n \leq 8\}$

5 a.) V; **b.)** F; **e.)** F; **f.)** V

6 b.) $\{2, 3, 4\}$
d.) $\{5, 7\}$
f.) $\{1, 3, 4, 6, 8\}$
g.) $\{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$

7 a.) A=$\{1\}$, B=$\{2\}$, C=$\{3\}$
c.) A=$\{1,4,5,6,7\}$, B=$\{2,4,5,6,7\}$, C=$\{3,4,5,6,7\}$

8 a.) O conjunto à esquerda da inclusão é formado por todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ que não possuem o número 1. Assim, a inclusão diz que todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ que não possuem o número 1 são também elementos de $\wp(C)$ (isto é, subconjuntos de C).
b.) $C = \mathbb{N}$ ou $C = \mathbb{N}\backslash\{1\}$

9 a.) Sim, é V
c.) Não, pode ser V ou F
e.) Sim, é V
g.) Não, pode ser V ou F
i.) Sim, é V

10 b.) Isso ocorre se $1 \in A\backslash B$ ou $1 \in B\backslash A$

11 a.) Demonstração de que $A \cap A \subset A$: se $x \in A \cap A$ então $x \in A$ e $x \in A$, logo $x \in A$. Demonstração de que $A \subset A \cap A$: se $x \in A$ então $x \in A$ e $x \in A$, logo $x \in A \cap A$.
d.) Se $x \in A$ então $x \in A$ ou $x \in B$, logo $x \in A \cup B$.
g.) Pelo item c deste exercício, escolhendo $B = \varnothing$, resulta que $A \cap \varnothing \subset \varnothing$. Reciprocamente, sabe-se que $\varnothing \subset X$ para todo conjunto X, logo $\varnothing \subset A \cap \varnothing$.

12 b.) (i) A inclusão $A \subset (A \cap B)$ é imediata (veja Exercício 10, item d). Por outro lado, se $x \in A \cup (A \cap B)$, então $x \in A$ ou $x \in A \cap B$, e em qualquer um dos casos resulta $x \in A$.

13 a.) Se $x \in A$ então, como $A \subset B$, $x \in B$. Como por hipótese $B \subset C$, de $x \in B$ segue que $x \in C$. Como isso vale para qualquer x, resulta $A \subset C$.

14 b.) (ii) Temos que $x \in (A \cap B)^{\mathrm{C}} \Leftrightarrow x \notin A \cap B$ o que ocorre se e somente se $x \notin A$ ou $x \notin B$, ou seja, $x \in A^{\mathrm{C}}$ ou $x \in B^{\mathrm{C}}$, o que equivale a $x \in A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}}$.

15 a.) $[\Rightarrow]$ Mostremos primeiro que $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$. Para isso, assumimos que $A \subset B$ e verificamos a igualdade $A \cup B = B$. A inclusão $B \subset A \cup B$ vale sempre. Por outro lado, dado $x \in A \cup B$ temos que $x \in A$ ou $x \in B$. Mas uma vez que $A \subset B$, resulta em qualquer caso $x \in B$. $[\Leftarrow]$ Mostremos agora que $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$, ou seja, assumimos que $A \cup B = B$ e provamos que $A \subset B$. Mas isto segue de $A \subset A \cup B$ e da hipótese de que $A \cup B = B$.

16 a.) *Dica:* Ao mostrar a inclusão $B \subset C$, considere, para cada $x \in B$, dois casos: $x \in A$ $x \notin A$. O mesmo para a outra inclusão.
b.) *Dica:* Ao comparar um elemento x de um conjunto ou do outro, considere o subconjunto unitário $\{x\}$.
c.) *Dica:* Se $A\backslash B$ não fosse vazio...

17 a.) Demonstraremos apenas uma das inclusões: $\wp(A) \cap \wp(B) \subset \wp(A \cap B)$. Se $C \in \wp(A) \cap \wp(B)$ então $C \in \wp(A)$ e $C \in \wp(B)$ e pela definição de conjunto potência, $C \subset A$ e $C \subset B$, logo se $c \in C$ temos que $c \in A$ e $c \in B$, ou seja $c \in A \cap B$, ou seja $C \subset A \cap B$, e logo $C \in \wp(A \cap B)$.
b.) Seja $C \in \wp(A) \cup \wp(B)$ então $C \subset A$ ou $C \subset B$. Desta forma se $c \in C$, então $c \in A$ ou $c \in B$, ou seja $c \in A \cup B$. Logo $C \subset A \cup B$, ou seja $C \in \wp(A \cup B)$.

19
a.) $\forall\ a \in A$, $(a, x) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in B \vee x \in C \Leftrightarrow (a, x) \in A \times B \vee (a, x) \in A \times C \Leftrightarrow (a, x) \in (A \times B) \cup (A \times C)$