Bases Matemáticas - Lista 3 B

Princípio de Indução Finita (PIF)

Parte I

1 — São dadas duas propriedades sobre números naturais, $P(n)$ e $Q(n)$ (note que, na linguagem da lógica, são proposições abertas com a variável livre $n \in \mathbb{N}$). Sabe-se somente que:

1. Para todo $n > 1$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
2. Para todo $n > 4$, $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$
3. $P(4)$ é verdadeira
4. $Q(1)$ é verdadeira

Determine para quais valores de n pode-se dizer, com certeza, que a propriedade $P(n)$ é verdadeira. Idem para a propriedade $Q(n)$.

2 — Formule algebricamente cada propriedade abaixo e prove-a utilizando o PIF

a) A soma dos n primeiros números pares é igual a $n\,(n+1)$.

b) A soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2.

3 — Utilize o PIF para provar que, para todo natural $n \geq 1$, vale

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

b) $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \cdots (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$.

c) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

d) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{(n+1)} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$

4 — Porque a seguinte demonstração por indução está incorreta? (*para efeito desse exercício, vamos assumir que não exista uma pessoa com um olho de cor diferente do outro*).

Teorema Todas as pessoas têm a mesma cor dos olhos.

Demonstração Para podermos usar o PIF, reformulemos a proposição acima do seguinte modo: $P(n)$: "Em qualquer conjunto de n pessoas, essas pessoas têm a mesma cor dos olhos".

Essa afirmação é claramente verdadeira para qualquer conjunto com apenas uma pessoa (caso base $n_0 = 1$).

Agora, assuma $P(k)$ como hipótese indutiva, isto é: em qualquer conjunto de k pessoas, estas têm a mesma cor dos olhos.

Dado um conjunto S qualquer de $k+1$ pessoas, chame de S_1 o conjunto formado removendo uma pessoa de S, e de S_2 o conjunto formado removendo outra pessoa de S (a pessoa removida para formar S_1 está em S_2, assim com aquela removida para formar S_2 está em S_1). Ambos os conjuntos S_1 e S_2 são formados por k pessoas, logo podemos usar a hipótese de indução.

Pela hipótese indutiva, todos os membros de S_1 têm a mesma cor dos olhos e todos os membros de S_2 têm a mesma cor dos olhos. E como $S_1 \cap S_2$ tem elementos de ambos os conjuntos, a cor dos olhos das pessoas em S_1 é a mesma das pessoas em S_2. Logo, todos os membros de S têm a mesma cor dos olhos.

Como S é arbitrário, fica provada $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Pelo PIF, conclui-se que $P(n)$ vale para todo $n \geq 1$.

☠

5 — Prove por indução que um caixa eletrônico pode entregar ao usuário qualquer valor maior ou igual a R\$ 4 usando apenas notas de R\$ 2 e de R\$ 5 (*Atenção: Antes de iniciar a demonstração, é importante formular algebricamente a propriedade a ser demonstrada*).

6 — Prove por indução as desigualdades

a) $n < 2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

b) $2n + 1 < 2^n$, $\forall\, n \geq 3$

7 — Prove que para qualquer inteiro positivo n o número $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

8 — Demonstre que para todo inteiro positivo n vale:

a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$.

b) $1 + 2(\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2})^2 + \cdots + n(\frac{1}{2})^{n-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

c) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Parte II

9 — Utilize o PIF para provar que as propriedades abaixo valem para todo natural $n \geq 1$

a) $$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$$

b) $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

d) $$\sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

e) $$\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$$

f) $$\sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1$$

10 — Prove por indução as seguintes propriedades do somatório:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (aditividade)

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (homogeneidade)

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (telescópica)

11 — Use as propriedades do exercício anterior para mostrar que:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$
(Dica: Use que $2k - 1 = k^2 - (k-1)^2$)

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$
(Dica: Use o item anterior)

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$
(Dica: $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$)

Exercícios Complementares

12 — Sejam a e r dois números inteiros, $r \neq 1$. Considere a **progressão geométrica de razão** r

$$a_1 = a;\ a_2 = ra;\ a_3 = r^2a;\ \cdots;\ a_j = r^{j-1}a; \cdots$$

Prove pelo PIF que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é:

$$S_n = \frac{r^n a - a}{r - 1}.$$

* **13** — Use indução para mostrar que qualquer conjunto finito com n elementos possui 2^n subconjuntos.

14 — Mostre que a soma dos ângulos internos de um poligono convexo com n lados ($n \geq 3$) é $(n-2)\pi$.

15 — Prove por indução as desigualdades

a) $n! \geq (2n)^2$, $\forall\ n \geq 5$

b) $(1+x)^n > 1 + nx$, $\forall\ n \geq 2$, em que x é um inteiro positivo fixado.

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$, $\forall\ n > 1$

Respostas dos Exercícios

1 $P(n)$ é certamente verdadeira $\forall\, n \geq 4$; $Q(n)$ certamente é verdadeira para $n = 1$. Nada podemos afirmar sobre o valor-verdade de $P(n)$ e $Q(n)$ para outros valores de n.

2 a.) $P(n) : 2 + 4 + \cdots + 2n = n\,(n + 1)$. **Dem.:** *Caso base:* $P(1) : 2 = 2 \cdot 1$ é V. *Passo indutivo:* Se vale $P(k)$, então $2 + 4 + \cdots + 2k + 2(k + 1) \overset{\text{HI}}{=} k(k+1)+2(k+1) = (k+1)(k+2)$, ou seja, $P(k+1)$ é V. *Conclusão:* Pelo PIF, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$

4 O passo indutivo é válido somente para $k \geq 2$, enquanto que o caso base foi verificado para $n_0 = 1$. O uso do Princípio de Indução pressupõe que o passo indutivo seja válido para todo $k \geq n_0$, o que não ocorre nesse caso.

5 Formulação algébrica: $P(n) : \exists\, a, b \in \mathbb{N} \,|\, 2a + 5b = n$. *Caso base ($n_0 = 4$):* Tomando $a = 2$ e $b = 0$ tem-se que $2.2 + 5.0 = 4$. *Passo indutivo:* Dado $k \geq 4$, suponha que existam a e b naturais tais que $2a + 5b = k$. Queremos achar coeficientes a' e b' tais que $2a' + 5b' = k + 1$. Para isso, observe que $2.3 + 5.(-1) = 1$. Então $k+1 = 2a+5b+2.3+5.(-1) = 2(a+3)+5(b-1)$. Assim, tomando $a' = a + 3$ e $b' = b - 1$, resulta $2a' + 5b' = k + 1$. Entretanto, o número b' só é natural se $b \geq 1$. Torna-se necessário então analisar o caso $b = 0$. Nesse caso, devemos ter necessariamente $a \geq 2$ (caso contrário, seria $k < 4$). Observando que $2.(-2) + 5.1 = 1$ seguimos com a mesma ideia de antes: $k + 1 = 2a+5b+2.(-2)+5.1 = 2(a-2)+5(b+1)$. Assim, tomando $a' = a-2$ (note que $a' \in \mathbb{N}$) e $b' = b+1$, resulta $2a' + 5b' = k + 1$. *Conclusão:* Pelo PIF, $P(n)$ vale para todo $n \geq 4$.

6 a.) *Caso base ($n_0 = 0$):* $0 < 1 = 2^0$. *Passo indutivo:* Dado $k \geq 0$, suponha $k < 2^k$. Então $k+1 \overset{\text{HI}}{<} 2^k+1 < 2^k+2^k = 2^(k+1)$. *Conclusão:* Pelo PIF, a desigualdade vale para todo $n \geq 0$.
b.) *Caso base ($n_0 = 3$):* $2.3 + 1 = 7 < 8 = 2^3$. *Passo indutivo:* Dado $k \geq 3$, suponha $2k + 1 < 2^k$. Então $2(k+1)+1 = (2k+1)+2 \overset{\text{HI}}{<} 2^k+2 < 2^k+2^k = 2^(k+1)$. *Conclusão:* Pelo PIF, a desigualdade vale para todo $n \geq 3$.

7 Queremos demonstrar, para todo $n \in \mathbb{Z}^*_+$, $P(n)$: existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{2n} - 1 = 3m$. *Caso base ($n_0 = 1$):* $P(1)$: tomando $m = 1$, resulta $2^{2.1} - 1 = 3 \cdot 1$. *Passo indutivo:* Dado $k \geq 1$, suponhamos $P(k)$ verdadeira: existe $m \in \mathbb{Z}^*$ tal que $2^{2k} - 1 = 3m$. Então: $2^{2(k+1)} - 1 = 2^{2k+2} - 1 = 2^{2k}2^2 - 1 = 4.2^{2k} - 1 = 3.2^{2k} + 2^{2k} - 1 \overset{\text{HI}}{=} 3.2^{2k} + 3m = 3(2^{2k} + m)$. Assim, tomando $m' = 2^{2k} + m$, resulta $2^{2(k+1)} = 3m'$. *Conclusão:* Pelo PIF, $P(n)$ vale para todo $n \geq 1$.

8 c.) *Caso base ($n \geq 1$):* $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$. *Passo indutivo:* Dado $k \geq 1$, suponha $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$. Então $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \overset{\text{HI}}{=} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = (\cdots) = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$. *Conclusão:* Pelo PIF, a igualdade vale para todo $n \geq 1$.

14 *Dica:* Para o passo indutivo, ao tomar um polígono convexo com $k + 1$ lados, divida-o em duas partes, uma das quais é um triângulo formado por 3 vértices consecutivos do polígono.

15 b.) *Caso base ($n_0 = 2$):* $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$. *Passo indutivo:* Dado $k \geq 2$, suponha $(1 + x)^k > 1 + kx$. Então $(1 + x)^(k + 1) = (1+x)^k(1+x) \overset{\text{HI}}{>} (1+kx)(1+x) = 1+x+kx+kx^2) > 1 + x + kx = 1 + (k + 1)x$. *Conclusão:* Pelo PIF, a desigualdade vale para todo $n \geq 2$.