Bases Matemáticas - Lista 4 A

Números Reais

Parte I

1 — Este exercício trata da ordenação dos números reais e sua relação com as operações de soma, multiplicação e potências.

a) Sabendo que $a > 0$, podemos afirmar que $a < a^2$?

b) Sabendo que $a < 0$, podemos afirmar que $a < a^2$?

c) Sabendo que $0 < a < 1$, coloque em ordem crescente os números $0, 1, a, a^2, a^3, a^{10}$.

d) Sabendo que $0 < a < b$, coloque em ordem crescente os números $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$.

e) Sabendo que $a < b < 0$, coloque em ordem crescente os números $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$.

f) Sabendo que $a < 0 < b$, coloque em ordem crescente os números $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$.

g) Sabendo que $0 < a < 1$, coloque em ordem crescente os números $0, 1, -1, a, -a, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}$.

h) Sabendo que $a+b > 0$ e $a < 0$, coloque em ordem crescente os números $0, a, -a, b, -b$.

i) Sabendo que $a < -1$, $0 < b < 1$ e $ab + 1 > 0$, coloque em ordem crescente $0, 1, -1, a, -a, b, -b, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, -\frac{1}{b}$.

j) Sabendo que $0 < a < 1 < b$ e $\frac{1}{a} < b$, coloque em ordem crescente os números $1, a, b, ab$.

k) Sabendo que $0 < a < 1 < b$, coloque em ordem crescente os números a, a^2, b, b^2.

l) Sabendo que $0 < a < 1 < b$ e $a^2 b > 1$, coloque em ordem crescente os números $a, a^2, b, b^2, \frac{1}{b}$.

2 — Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ não nulos, coloque em ordem crescente os números:

$$0,\ 1,\ a,\ b,\ c,\ -a,\ -b,\ -c,\ a^2,\ b^2,\ c^2,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c},$$

sabendo que:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < a < -b < 1 \\ 4 < c \\ a < b^2 \end{cases}$$

3 — Demonstre as propriedades abaixo, no universo dos números reais, utilizando apenas as propriedades básicas da soma e do produto: associatividade, comutatividade, elemento neutro, existência de oposto (na soma) e inverso (no produto), distributiva.

a) $a + b = b + c \Rightarrow a = c$

b) $(a \neq 0 \wedge a \cdot b = a \cdot c) \Rightarrow b = c$

c) $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$

d) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b$

4 — Utilizando os axiomas de ordem, mostre que $\forall\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$

a) $(a \leq c \wedge b \leq d) \Rightarrow a + b \leq c + d$

b) $(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

5 — Para cada inequação abaixo, mostre que seu conjunto solução (em $\mathbb{R}$) é o conjunto S dado:

a) $|x + 3| < 1 - x$; $\quad S = (-\infty, -1)$

b) $|x^2 - 3| < 1 + |x|$; $\quad S = \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, -1\right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

Parte II

6 — Para cada afirmação abaixo, determine se é verdadeira ou falsa:

a) O conjunto $\mathbb{Q}$ não possui nem supremo nem ínfimo.

b) O ínfimo do conjunto $\{3 - \frac{1}{n+4} \mid n \in \mathbb{N}\}$ é 3.

c) O supremo do conjunto $\{4 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ é 4.

7 — Em cada conjunto abaixo, determine seu ínfimo e seu supremo, caso existam:

a) $A = \{\frac{m}{m+n} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

b) $B = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}^*\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

d) $D = \{a - b \mid a \in (1,2), b \in (3,4)\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 7\}$

f) $F = \{\frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

g) $G = \{1 - \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

h) $H = \{\frac{n+(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

i) $I = \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$

j) $J = \{(-\frac{1}{3})^m - \frac{5}{n} \mid m \in \mathbb{N},\, n \in \mathbb{N}^*\}$

Parte III

8 — Escreva as seguintes expressões sem utilizar sinais do valor absoluto, separando em dois *ou mais* casos quando for necessário (veja o modelo abaixo):

$$|x-2| - 1 = \begin{cases} x - 3 & \text{se} \quad x \geq 2 \\ -x + 1 & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$$

a) $\left||x| - 1\right|$

b) $a - \left|a - |a|\right|$

c) $|x-1| - |2-x|$

d) $\left||x-3| - 2\right|$

9 — Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações

a) $|x-3| = 8$

b) $|x| = -x$

c) $|x| = -x + 2$

d) $|-x+2| = 2x + 1$

e) $|5x - x^2 - 6| = x^2 - 5x + 6$

10 — Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações

a) $|x-1| \cdot |x+1| = 0$

b) $|x-1| \cdot |x+2| = 3$

c) $|x+1| + |x-2| = 1$

d) $|x+1| + |x-2| = 5$

e) $|x-1| - 2\,|x-2| + 3\,|x-3| = 4$

f) $\left||x-1| + 2\right| = 3$

g) $\left||x-1| - 2\right| = 3$

h) $\left||2-x| - |x+3|\right| = 4$

11 — Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações

a) $|x-3| < 8$

b) $|x+4| < 2$

c) $|2-x| > 3$

d) $|x+3| + x < 1$

e) $|x+2| > |x-3|$

f) $|x-1| + |x-2| > 1$

g) $|x-1| + |x+1| \leq 2$

h) $|x-1| + |x+1| < 2$

12 — Em cada caso abaixo, expresse a(s) condição(ões) dadas em termos de equações ou inequações envolvendo valores absolutos e determine os respectivos conjuntos-solução

a) x está mais próximo de 5 do que de 2

b) A diferença entre as distâncias de x a -2 e 3 é exatamente igual a 5

c) A distância entre x e 1 não supera 3 e x está mais perto de 6 do que de -8

13 — Resolva as seguintes inequações

a) $|x-2| - x\,|x+2| < 1$

b) $|x^2 - 4| + 2x + 1 \geq 0$

c) $\Big|1 - |x+3|\Big| > 2$

14 — Determine o domínio da inequação abaixo e seu conjunto-solução

$$\frac{9}{|x-5|-3} \geq |x-2|$$

Parte IV

15 — Prove as seguintes propriedades

a) $|x| = |-x|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

b) $|xy| = |x||y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

c) $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*$

16 — Dada uma constante $r > 0$, e um número real a qualquer, mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$,

a) $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$

b) $|x-a| < r \Leftrightarrow a-r < x < a+r$

c) $|x| \geq r \Leftrightarrow x \leq -r \vee x \geq r$

d) $|x-a| \geq r \Leftrightarrow x \leq a-r \vee x \geq a+r$

17 — Determine se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações

a) $|x-2| < 3 \Rightarrow x < 3, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

b) $|x-2| < 1 \Rightarrow x < 4, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

c) $|x-3| < 1 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

d) $|x-3| > 2 \Rightarrow x(x-4) > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

e) $|x-1| > 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

f) $|x-5| < 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$

18 — Em cada caso, determine para quais valores de r $(r > 0)$ a implicação é verdadeira

a) $|x-4| < r \Rightarrow x^2 - 10x + 9 < 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

b) $|x+3| < r \Rightarrow x^2 - 10x + 9 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Exercícios Complementares

19 — Prove as seguintes propriedades

a) *Desigualdade Triangular:*
$|x+y| \leq |x| + |y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

b) $|x| - |y| \leq |x-y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

c) $||x| - |y|| \leq |x-y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

d) $|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|, \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$

20 — Use a Desigualdade Triangular para mostrar que

a) Se $|x-3| < 0,005$ e $|y-1| < 0,005$, então $|(x+y)-4| < 0,01$

b) Se $|x-x_0| < \frac{r}{2}$ e $|y-y_0| < \frac{r}{2}$, então $|(x+y)-(x_0+y_0)| < r$

21 — Determine para quais valores de r $(r > 0)$ pode-se afirmar: se $|x-1| < 0,001$ e $|y-2| < r$, então $|x+y-3| < 0,02$.

22 — Use a Desigualdade Triangular para mostrar que

a) Se $|x-3| < \frac{5}{1000}$ e $|y-1| < \frac{5}{1000}$, então $|(x-y)-2| < \frac{1}{100}$

b) Se $|x-x_0| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|y-y_0| < \frac{\epsilon}{2}$, então $|(x-y)-(x_0-y_0)| < \epsilon$

23 — Determine para quais valores de r $(r > 0)$ pode-se afirmar: se $|x-1| < 0,001$ e $|y-2| < r$, então $|x-y-1| < 0,02$.

Respostas dos Exercícios

1 a.) Não. Por exemplo, $(1/2)^2 < (1/2)$
c.) $0 < a^{10} < a^3 < a^2 < a < 1$
e.) $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
g.) $-\frac{1}{a} < -1 < -a < 0 < a < 1 < \frac{1}{a}$
i.) $-\frac{1}{b} < a < -1 < \frac{1}{a} < -b < 0 < b < -\frac{1}{a} < 1 < -a < \frac{1}{b}$
k.) $0 < a^2 < a < 1 < b < b^2$

2

$$-c < \frac{1}{b} < -a < 0 < \frac{1}{c} < a^2 < \\ < a < b^2 < -b < 1 < \frac{1}{a} < c$$

6 a.) V;
c.) F

7 a.) $inf(A) = 0, sup(A) = 1;$
c.) $inf(C) = 1, sup(E) = 2;$
e.) Não é limitado inferiormente, nem superiormente;
g.) $inf(G) = \frac{1}{2}, sup(D) = 2;$
i.) $inf(I) = 0, sup(I) = 1;$

8 a.)

$$\begin{cases} x-1, \text{ se } x \geq 1 \\ 1-x, \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ x+1, \text{ se } -1 \leq x < 0 \\ -x-1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$$

c.)

$$\begin{cases} 1, \text{ se } x \geq 2 \\ 2x-3, \text{ se } 1 \leq x < 2 \\ -1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

9 b.) $Sol = (-\infty, 0]$
e.) $Sol = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

10 b.) $Sol = \{\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\}$
c.) $Sol = \varnothing$
e.) $Sol = [1, 2) \cup \{5\}$
h.) $Sol = \{-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\}$

11 b.) $Sol = (-6, -2)$
c.) $Sol = (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$
f.) $Sol = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
g.) $Sol = \{-1, 1\}$

12 b.) $|x+2| - |x-3| = 5; Sol = [3, +\infty)$
c.) $|x-1| < 3$ e $|x-6| < |x+8|\,; Sol = (-1, 4)$

13 a.) $Sol = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ ou $x \geq 2\}$
c.) $Sol = (-\infty, -6) \cup (0, +\infty)$

14 Dom $= \mathbb{R} \backslash \{2, 8\}$; $Sol = [-1, 2) \cup (8, 5+\sqrt{3}]$

15 b.) Dica: estude a igualdade em cada um dos casos: $(x \geq 0 \wedge y \geq 0)$, $(x \geq 0 \wedge y < 0)$, $(x < 0 \wedge y \geq 0)$ e $(x < 0 \wedge y < 0)$.

16 c.) É equivalente ao item a
d.) É equivalente ao item b

17 a.) F; **c.)** V; **e.)** V;

18 b.) $0 < r < 4$

19 a.) $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$. Somando as desigualdades temos: $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$, i.e. $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$, donde a tese.
b.) Basta observar que $|x| = |x - y + y|$ e aplicar a Desigualdade Triangular.

22 a.) Dica: observe que $x - y - 2 = (x-3) + (1-y)$.