

Bases Matemáticas - Lista 5

Funções - Parte 2

Função Composta, Inversa e Gráficos

Função Composta, Inversa

1 — Dadas as funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \pi \llbracket x \rrbracket^1$, determine os domínios e as imagens das funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

2 — Para cada par de funções f, g abaixo encontre o domínio e as expressões de $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ f$ e $g \circ g$.

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$
 $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x-1}$
- b) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{x}$
 $g: (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{2-x}$
- c) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$
 $g: \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$
- d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$
 $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}$

3 — Denotando por ι a função identidade, mostre que para toda função f vale que:

- a) $\iota \circ f = f$ e $f \circ \iota = f$
- b) Se f é inversível, então $f \circ f^{-1} = \iota$ e $f^{-1} \circ f = \iota$

Em tempo, isso significa que a função identidade cumpre o papel de *elemento neutro* da operação de composição de funções.

4 — Para as seguintes funções $h(x)$, decompõe-a como compostas de funções mais

simples

- a) $h(x) = \sin(x + x^2)$
- b) $h(x) = \operatorname{cosec}(\cos(x))$
- c) $h(x) = \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)$
- d) $h(x) = \sin((\sin^7(x^7 + 1))^7)$
- e) $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$
- f) $h(x) = \sin(\cos(\frac{ax+b}{cx+d}))$
- g) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$
- h) $h(x) = x^{x^x}$
- i) $h(x) = e^{\sqrt{1+x}}$
- j) $h(x) = \ln(2 + \frac{1}{x})$
- k) $h(x) = 2e^{x+1}$
- l) $h(x) = 2 + \frac{1}{\ln(2 + \frac{1}{x})}$
- m) $h(x) = e^{e^{3(x^3+1)}}$

5 — Para as funções abaixo encontre $f(x+2)$, $f(-x)$, $f(x+h)$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, sendo $h \neq 0$:

- a) $f(x) = x$
- b) $f(x) = 3x + 4$
- c) $f(x) = x^2$
- d) $f(x) = x^2 - x$
- e) $f(x) = x^3 + x^2$

6 — Determine a função inversa de cada uma das funções abaixo, atentando para os domínios e contradomínios:

¹Dado $x \in \mathbb{R}$, o número inteiro $\llbracket x \rrbracket := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ é maior inteiro menor ou igual a x . Este número é chamado de **parte inteira de x** .

- a) $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$,
 $f(x) = \sqrt{x}$
- b) $f : (-\infty, 1] \rightarrow [0, +\infty)$,
 $f(x) = x^2 - 2x + 1$
- c) $f : [-\frac{3}{4}, +\infty) \rightarrow [-\frac{1}{8}, +\infty)$,
 $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$
- d) $f : [-1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 1]$,
 $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$

7 — Para cada função abaixo, determine um domínio D que a torne inversível e expresse sua inversa:

- a) $f : D \rightarrow [1, 4]$, $f(x) = x^2$
- b) $f : D \rightarrow [1, 4]$, $f(x) = \sqrt{x}$
- c) $f : D \rightarrow [-2, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 4x + 2$
- d) $f : D \rightarrow [14, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 4x + 2$

8 — Para cada função abaixo, determine o contradomínio C que a torne inversível e expresse sua inversa:

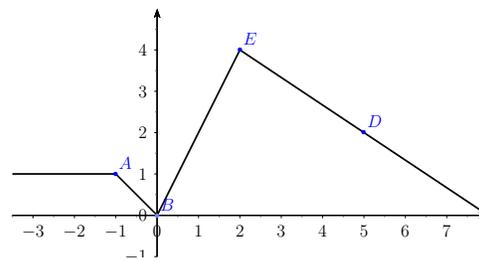
- a) $f : [1, 4] \rightarrow C$, $f(x) = 3x - 1$
- b) $f : [-1, +\infty) \rightarrow C$, $f(x) = \sqrt{x+1}$
- c) $f : [0, +\infty) \rightarrow C$, $f(x) = \sqrt{x+1}$
- d) $f : (-\infty, -\frac{3}{2}] \rightarrow C$, $f(x) = 2x^2 + x - 3$
- e) $f : [-\frac{1}{4}, 1] \rightarrow C$, $f(x) = 2x^2 + x - 3$

9 — Para cada função abaixo, determine o domínio máximo e o contradomínio para que ela seja bijetora. Neste caso, encontre uma expressão analítica para f^{-1} .

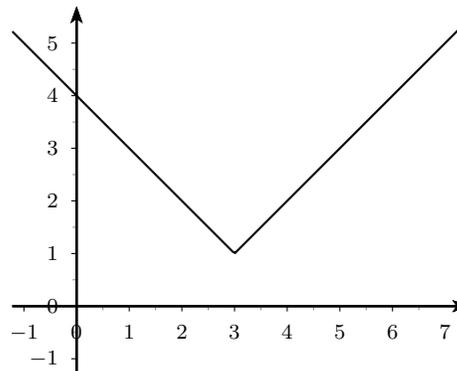
- a) $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$
- b) $f(x) = \frac{2x+3}{1-5x}$
- c) $f(x) = 2 + \frac{1}{\ln(2 + \frac{1}{x})}$
- d) $f(x) = e^{e^{3(x^3+1)}}$

Gráfico, Transformações no Gráfico,
 Funções Modulares

10 — Encontre uma expressão para a função cujo gráfico é a curva abaixo:



11 — Dado o seguinte gráfico:

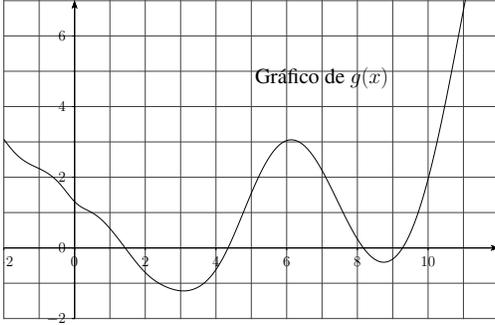
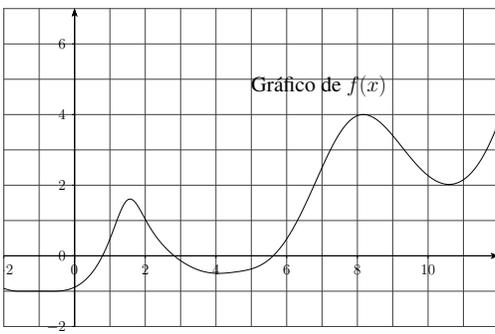


- a) Se soubermos que o gráfico anterior é o gráfico de $f(x+1) + 2$ como é o gráfico de $f(x)$?
- b) Se soubermos que o gráfico anterior é o gráfico de $|f(x)| + 1$ como poderia ser o gráfico de $f(x)$? (Forneça pelo menos duas respostas distintas)
- c) Se soubermos que o gráfico anterior é o gráfico de $|f(x) + 1|$ como poderia ser o gráfico de $f(x)$? (Forneça pelo menos duas respostas distintas)

12 —

- a) Como o gráfico de $f(|x|)$ está relacionado como o gráfico de $f(x)$?
- b) Esboce o gráfico de $f(x) = |x|^3$.
- c) Esboce o gráfico de $f(x) = -|x|^5$.
- d) Esboce o gráfico de $f(x) = \text{sen}(|x|)$

13 — Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções cujos gráficos estão apresentados a seguir



A partir desses gráficos, esboce o gráfico das seguintes funções:

- $2f(x)$
- $-g(x)$
- $f(-x)$
- $f(|x|)$
- $f(-|x|)$
- $\frac{1}{2}g(x) + 1$
- $-\frac{1}{2}g(x) + 1$
- $-\frac{1}{2}|g(x)| + 1$
- $f(\frac{1}{2}x)$
- $||f(x)| - 1|$

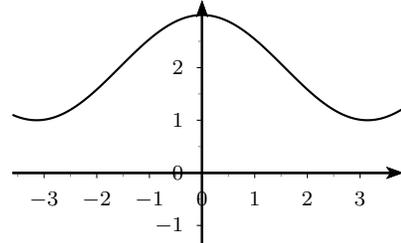
14 — Esboce o gráfico das seguintes funções, utilizando o gráfico de uma função mais simples e aplicando as transformações apropriadas. Para cada uma dessas funções indique as intersecções com os eixos x e y , as regiões nas quais as funções são positivas, negativas, crescentes e decrescentes.

- $f(x) = |2x| + 1$
- $f(x) = (x + 3)^4$
- $f(x) = (x + 3)^4 - 1$
- $f(x) = |(x + 3)^4 - 1|$
- $f(x) = |(x + 3)^4 - 1| - 1$
- $f(x) = |x - 1| + 1$
- $f(x) = |(x - 4)^6 - 2|$
- $f(x) = \sqrt{|x + 2|}$

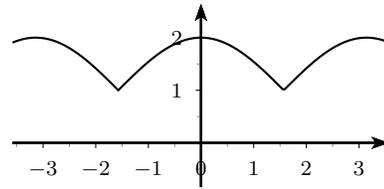
$$i) f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{2} + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$j) f(x) = \sqrt{-2x} - 2$$

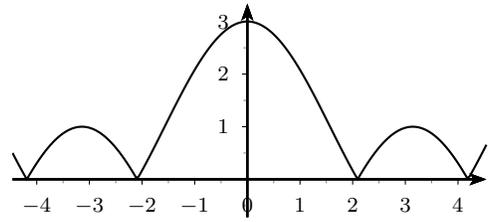
15 — Os seguintes gráficos foram obtidos a partir do gráfico da função $f(x) = \cos(x)$ através de translações, homotetias e módulos. Qual função que representa cada um dos gráficos a seguir:



a)



b)



c)

16 — Faça os gráficos das seguintes funções modulares:

- $f(x) = |x|$
- $f(x) = |x| + |x - 1|$
- $f(x) = |x| + |x - 1| + |x - 2|$
- $f(x) = |x^2 - x| + 3$
- $f(x) = |x^2 - x| + |x^2 + 1|$

17 — Sabendo que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é par, o que podemos concluir sobre funções: $2f(x)$, $f(x) + 3$, $f(x - 1)$ e $|f(x)|$? E se f for uma função ímpar?

Respostas dos Exercícios

1 Dom $f \circ g = \mathbb{R}$, Im $f \circ g = \{0\}$; Dom $g \circ f = \mathbb{R}$, Im $g \circ f = \{-\pi, 0, \pi\}$;

2 b.) $(f \circ g)(x) = \frac{-1}{\sqrt{2-x}}$; $(f \circ f)(x) = x$; $(g \circ f)(x) = \sqrt{2 + \frac{1}{x}}$; $(g \circ g)(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2-x}}$;

d.) $(f \circ g)(x) = \sin \sqrt{x}$; $(f \circ f)(x) = \sin(\sin x)$; $(g \circ f)(x) = \sqrt{\sin x}$; $(g \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$;

4 a.) $h = g \circ f$, onde $f(x) = x + x^2$, $g(x) = \sin x$;

d.) $h = f \circ g \circ g \circ f \circ j \circ g$, onde $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^7$, $j(x) = x + 1$;

h.) $h = f \circ g$, onde $f(x) = e^x$, $g(x) = x^x \ln x$

5 a.) $f(x) = x$, $f(x+2) = x+2$, $f(-x) = -x$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$

6 b.) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$

c.) $f^{-1}(x) = \frac{-3+2\sqrt{2(1-y)}}{4}$

7 a.) $D = [1, 2]$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ou

$D = [-2, -1]$, $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

b.) $D = [1, 16]$, $f^{-1}(x) = x^2$

d.) $D = (-\infty, -2]$, $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{2-x}$ ou

$D = [6, +\infty)$, $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{2-x}$

8 c.) $C = [1, +\infty)$, $f^{-1}(x) = (x-1)^2$

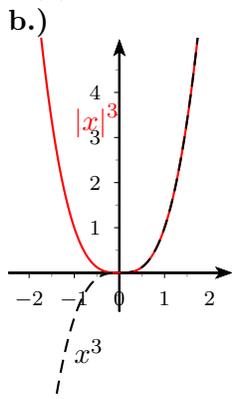
d.) $C = [0, +\infty)$, $f^{-1}(x) = \frac{-1-\sqrt{25+8x}}{4}$

e.) $C = [-\frac{25}{8}, 0]$, $f^{-1}(x) = \frac{-1+\sqrt{25+8x}}{4}$

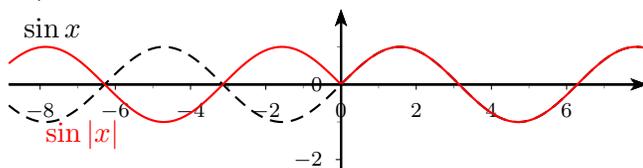
10 O gráfico corresponde à função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < -1 \\ -x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \frac{-2x+16}{3} & \text{se } 2 \leq x \end{cases}$$

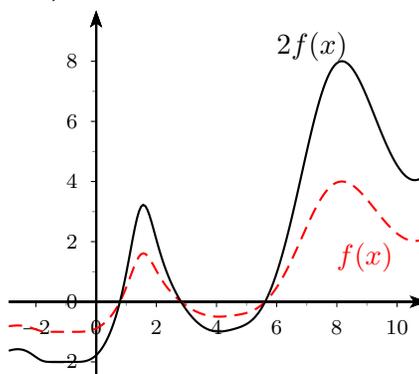
12 a.) O gráfico de $f(|x|)$ coincide com o gráfico de $f(x)$ para $x \geq 0$, isto é, do lado direito do eixo y . Para $x < 0$, o gráfico de $f(|x|)$ é a reflexão do gráfico de $f(x)$ relativamente ao eixo y .



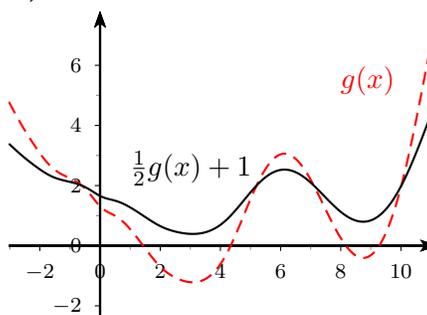
d.)



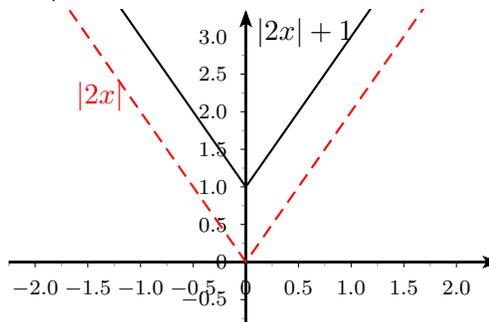
13 a.)



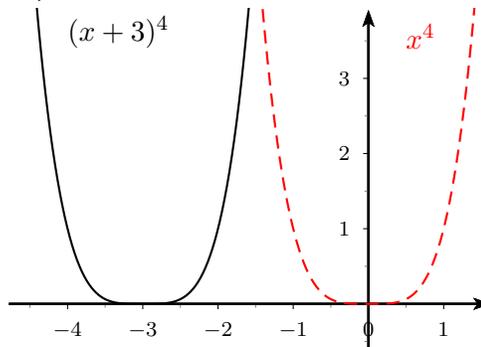
f.)



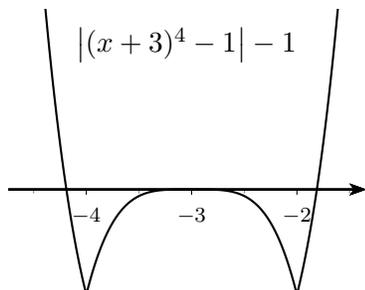
14 a.)



b.)



e.)



15 a.) $\cos(x) + 2$

b.) $|\cos(x)| + 1$

c.) $|2 \cos(x) + 1|$