Bases Matemáticas - Lista 6

Funções - Parte 3

Funções Quadráticas, Polinomiais e Racionais; Operações com funções

Funções Quadráticas

1 — Esboce o gráfico das seguintes funções, indicando em quais intervalos as funções são crescentes e decrescentes, explicitando o eixo de simetria e encontrando as coordenadas dos pontos de máximo e/ou mínimo.

a) $f(x) = (x-4)^2 + 2$

b) $f(x) = -(x+4)^2 - 2$

c) $f(x) = x^2 - 1$

d) $f(x) = x^2 - x$

e) $f(x) = 2x^2 - 7x + 4$

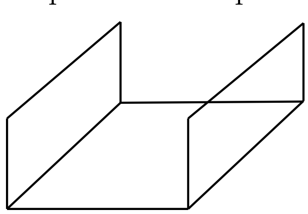
f) $f(x) = x^2 + 1$

g) $f(x) = 3x^4 - 12x^2 - 1$

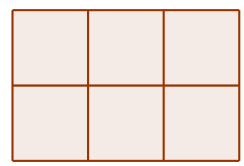
h) $f(x) = 7 + 6x - x^2$

2 — Um fazendeiro pretende construir um chiqueiro retangular e para isso possui 100m de cerca. Ache as dimensões do chiqueiro de modo a maximizar a área do mesmo. Qual é essa área?

3 — Uma calha é feita dobrando uma folha de alumínio de 40cm de largura de modo que as laterais formem um ângulo reto com o fundo. Determine a profundidade da calha que maximiza o volume de água que a calha suporta.



4 — Um fazendeiro possui 2000m de cerca para construir 6 currais conforme mostrados na figura abaixo. Ache as dimensões que maximizam a área cercada. Determine essa área.



5 — Um projetil é lançado no ar. A função que descreve sua altura em relação ao solo em função do tempo é dada por:

$$h(t) = h_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

sendo h_0 a altura inicial, v_0 a velocidade inicial e g a força da gravidade (constante).

a) Em que instante de tempo a altura máxima é atingida?

b) Depois de quanto tempo o projetil atinge o solo?

c) Determine a altura máxima atingida pelo projetil se ele for lançado do solo.

d) Para um projetil lançado do solo, o que acontece com sua altura se dobrarmos a velocidade inicial?

Operações com Funções

6 — Para cada par de funções $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, determine os domínios máximo de definição de $f(x)$, $g(x)$,$(f+g)(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$.

a)$f(x) = \sqrt{(x+2)}$ e $g(x) = |x|$

b)$f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$ e $g(x) = x^2$

c)$f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$ e $g(x) = \sqrt{x}$

d)$f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ e $g(x) = 2^{-x}$

Funções Polinomiais e Racionais

7 — Encontre o domínio máximo de definição e esboce o gráfico das seguintes funções, explicitando quais são as intersecções com os eixos x e y, buracos e assíntotas horizontais e verticais quando existirem.

a) $p(x) = (x^2-4)(x+2)(x+1)$

b) $f(x) = \dfrac{4x+9}{x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2}{x-2}$

d) $f(x) = \dfrac{5x+21}{x^2-10x+25}$

8 — Encontre o domínio máximo de definição e esboce o gráfico das seguintes funções, utilizando o gráfico de uma função mais simples e aplicando as transformações apropriadas. Para cada uma dessas funções indique as intersecções com os eixos x e y, as regiões nas quais as funções são positivas, negativas, crescentes e decrescentes.

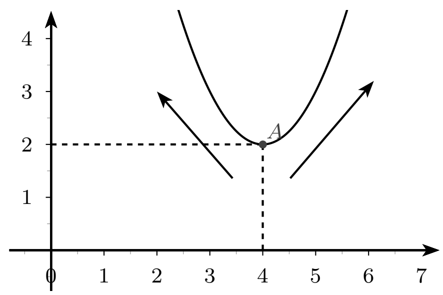
a) $f(x) = \frac{1}{x+7}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+4}$

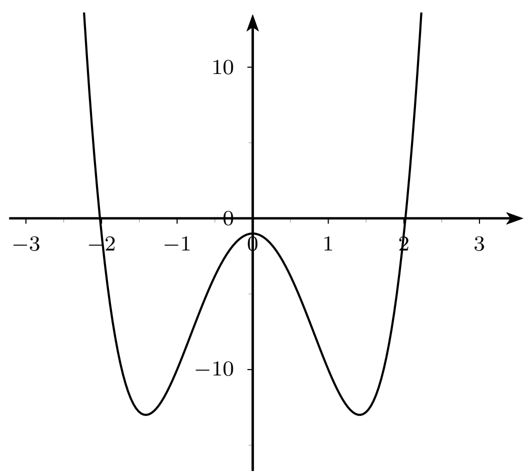
c) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$.

Respostas dos Exercícios

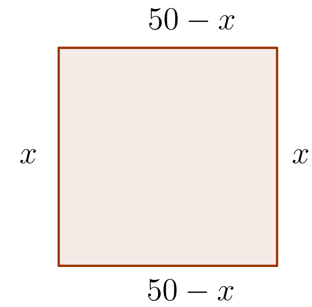
1 a.) Coordenadas do ponto de mínimo $(4, 2)$. A função é crescente para $x \geq 4$ e decrescente para $x \leq 4$



g.) Dica: Faça a substituição $t = x^2$ para encontrar as raízes e os pontos de máximo e mínimo. Raízes: $-2, 2$ Pontos de mínimo: $(-\sqrt{2}, -13)$ e $(\sqrt{2}, -13)$. Decrescente para $x \leq -\sqrt{2}$ e $x \in [0, \sqrt{2}]$.



2 A área do chiqueiro é dada pela função $A(x) = x(50 - x) = 50x - x^2$



A coordenada x do vértice da parábola é $-b/2a$. Logo o máximo ocorre quando $x = 10$ e nesse caso o chiqueiro é um quadrado de área 100

5 a.) A altura máxima é atingida no tempo $t = -v_0/g$

b.) Dica: procure a maior raiz da equação quadrática

c.) Nesse caso $h_0 = 0$

6 a.) $\operatorname{Dom} f = [-2, +\infty)$, $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$, $\operatorname{Dom}(f+g) = \operatorname{Dom} fg = [-2, +\infty)$; $\operatorname{Dom} f/g = [-2, +\infty)\backslash\{0\}$;
$\operatorname{Dom} f \circ g = \mathbb{R}$, $\operatorname{Dom} g \circ f = [-2, +\infty)$ e
$(f \circ g)(x) = \sqrt{|x| + 2}$; $(g \circ f)(x) = \sqrt{x + 2}$

b.) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$, $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$, $\operatorname{Dom}(f+g) = \operatorname{Dom} fg = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$; $\operatorname{Dom} f/g = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$;
$\operatorname{Dom} f \circ g = \mathbb{R}\backslash\{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, $\operatorname{Dom} g \circ f = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$ e
$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2(x^2-2)}$; $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2(x-2)^2}$

c.) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$, $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}_+$, $\operatorname{Dom}(f+g) = \operatorname{Dom} fg = \mathbb{R}_+\backslash\{0, 2\}$; $\operatorname{Dom} f/g = \mathbb{R}_+\backslash\{0, 2\}$;
$\operatorname{Dom} f \circ g = \mathbb{R}_+\backslash\{0, 4\}$, $\operatorname{Dom} g \circ f = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ e
$(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$; $(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x-2)}}$

d.) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$, $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$, $\operatorname{Dom}(f+g) = \operatorname{Dom} fg = \mathbb{R}$; $\operatorname{Dom} f/g = \mathbb{R}$;
$\operatorname{Dom} f \circ g = \mathbb{R}$, $\operatorname{Dom} g \circ f = \mathbb{R}$ e
$(f \circ g)(x) = \sqrt[5]{2^{-3x}}$; $(g \circ f)(x) = 2^{-\sqrt[5]{x^3}}$