Bases Matemáticas - Lista 8

Funções - Parte 5

Funções Trigonométricas

1 — Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \mathrm{tg}(1-x)$

b) $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

c) $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x}$

d) $f(x) = 3\,|\cos|x| - 1|$

2 — Para cada uma das funções reais f abaixo, determine seu domínio, sua imagem, seu período, os intervalos nos quais a função é positiva, negativa, crescente e decrescente. Além disso, analise sua paridade (par ou ímpar) e esboce o seu gráfico.

a) $f(x) = 4\,\mathrm{sen}(2x)$

b) $f(x) = 3\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 7$

c) $f(x) = \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

d) $f(x) = \mathrm{sen}\, x \cos x$

e) $f(x) = -3\csc(x - \pi)$

f) $f(x) = \tan(|x|)$

3 — Esboce os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = \cos 3x$

b) $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(3x + \pi)$

c) $f(x) = \mathrm{sen}(x) + x$

d) $f(x) = \mathrm{tg}(|x|)$

e) $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$

f) $f(x) = \tan(-x) + 2$

g) $f(x) = |\tan(x)|$

h) $f(x) = \tan(2x - |x-1|)$

i) $f(x) = \begin{cases} \cos(2x), & \text{se } x < 1 \\ 2\cos(x-1), & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

4 — Calcule

a) $\mathrm{sen}(a)$ sabendo que $\cos(a) = b$ e $0 \leq a \leq \pi/2$

b) $\mathrm{sen}(a)$ sabendo que $\mathrm{tg}(a) = b/c$ e $0 \leq a \leq \pi/2$

c) $\mathrm{sen}(a)$ sabendo que $\mathrm{tg}(a) = b/c$ e $\pi/2 \leq a \leq \pi$

d) $\mathrm{arcsen}(a)$ sabendo que $\mathrm{tg}(a) = b/c$ e $0 \leq a \leq \pi/2$

e) $\mathrm{cotg}(a)$ sabendo que $\mathrm{sen}(a) = b/c$ e $0 \leq a \leq \pi/2$

5 — Calcule

a) $\mathrm{arcsen}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

b) $\arctan(1) - \arctan(-1)$

c) $\mathrm{arcsen}(\cos(2x))$ $0 \leq x \leq \pi/2$

d) $\mathrm{arcsen}(\cos(2x))$ $\pi/2 \leq x \leq \pi$

6 — Sendo x um número real tal que $\mathrm{sen}\, x = \sqrt{a - \dfrac{1}{2}}$ e $\cos x = a - 1$, determine a.

7 — Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\cos^2 x = 1 - \mathrm{sen}\, x$

b) $\mathrm{sen}\, x = \cos\left(\dfrac{9\pi}{2} - 2x\right)$

c) $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2x)$

d) $\sec 2x = 2$

e) $\arctan(x^2 + x - 1) = \frac{\pi}{4}$

f) $\operatorname{arcsec}(2x - \pi) = \frac{2\pi}{3}$

8 — Considere a equação trigonométrica $\tan x + \cot x = a$, onde $a \in \mathbb{R}$. Para quais valores de a a equação admite solução? Resolva a equação para $a = 4$.

9 — Para cada uma das funções f abaixo, determine seu domínio, sua imagem e esboce o seu gráfico.

a) $f(x) = 3 \operatorname{arcsen}(x - 1) + 2$, sendo arcsen a função inversa de $\operatorname{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$.

b) $f(x) = \arccos\left(2x + \frac{1}{2}\right)$, sendo arccos a função inversa de $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$.

c) $f(x) = |\arctan(|x-1|) - 1|$, sendo arctan a função inversa de $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$.

Respostas dos Exercícios

1 a.) $\mathbb{R}\backslash\{1-\pi/2+k\pi\}$ com $k\in\mathbb{N}$

3 c.) $f(x)=sen(x)+x$ é uma função ímpar, logo tem gráfico simétrico com relação a origem. Também tem único zero em $x=0$. Seu gráfico, para $x\in[-3\pi,3\pi]$ é dado por

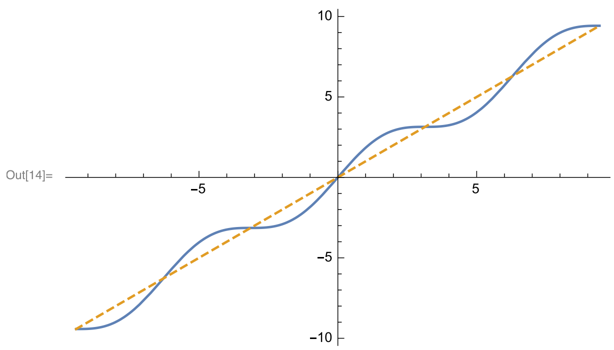


Figura 1: Gráfico de $f(x)=x+sen(x)$. A linha tracejada corresponde ao gráfico de $g(x)=x$.

e.) $f(x)=xsen(x)$ é uma função par. Os zeros de $f(x)$ coincidem com os zeros da função $sen(x)$. Seu gráfico para $x\in[-10\pi,10\pi]$ é dado por:

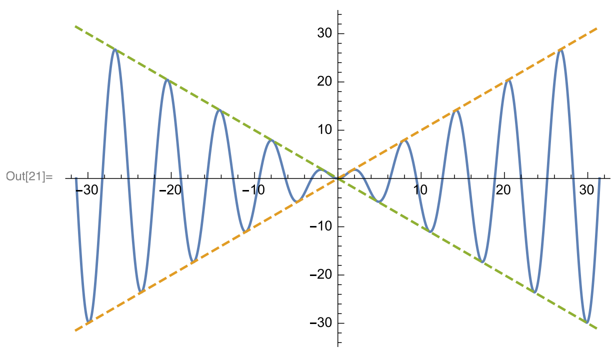
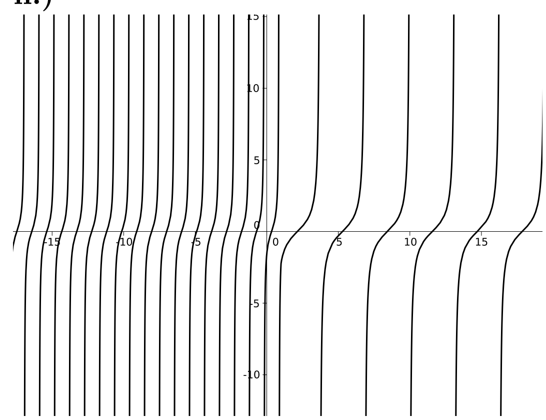


Figura 2: Gráfico de $f(x)=xsen(x)$. As linhas tracejadas correspondem aos gráficos de $h(x)=-x$ e $g(x)=x$.

h.)



5 a.) $-\frac{\pi}{3}$
b.) $\frac{\pi}{2}$
c.) $\frac{\pi}{2}-2x$
d.) $2x-\frac{3\pi}{2}$

7 a.) $S=\left\{x\in\mathbb{R};\ x=k\pi\ ou\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$
b.) $S=\left\{x\in\mathbb{R};\ x=k\pi,\ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ou\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$
c.) $S=\{-2,1\}$.

8 A equação admite solução para $a\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$. Sua solução quando $a=4$ é dada por $S=\left\{x\in\mathbb{R}; x=\frac{\pi}{12}+k\pi\ ou\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$