Bases Matemáticas - Lista 9

Limites de funções - Parte I

Definição de Limites

1 — Verifique se é verdadeiro ou falso:

a) $|x-2| < 10^{-1} \Rightarrow |f(x)-5| < 10^{-1}$, onde $f(x) = 2x+1$

b) $|x-2| < 10^{-2} \Rightarrow |f(x)-5| < 10^{-1}$, onde $f(x) = 2x+1$

c) $|x-1| < 10^{-1} \Rightarrow |f(x)-3| < 10^{-1}$, onde $f(x) = 4x-1$

d) $|x-1| < 10^{-2} \Rightarrow |f(x)-3| < 10^{-1}$, onde $f(x) = 4x-1$

2 — Para quais valores $\delta > 0$ são verdadeiras as afirmações:

a) $|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-5| < 10^{-1}$, onde $f(x) = 2x+1$

b) $|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-3| < 10^{-1}$, onde $f(x) = 4x-1$

3 — Para cada item abaixo, determine um valor $\delta > 0$ (em função de ϵ) que torne a implicação verdadeira:

a) $|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-5| < \epsilon$, onde $f(x) = 2x+1$

b) $|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-3| < \epsilon$, onde $f(x) = 4x-1$

4 — Prove a partir da definição de limite que:

a) $\lim\limits_{x\to 3}(x+6) = 9$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

d) $\lim\limits_{x\to 3} 4 = 4$

e) $\lim\limits_{x\to 3} x^3 = 27$

f) (*) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$

g) (*) $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$

5 — Prove que a função $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ não possui limite quando $x \to 0$.

Continuidade

6 — Prove pela definição que as seguintes funções são contínuas nos pontos especificados:

a) $f(x) = x^4$ em $x = 1$

b) $f(x) = |x|$ em $x = 0$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ em $x = 4$

d) $f(x) = 5x - 2$ em $x = 1$

7 — Calcule os limites abaixo, usando a mudança de variável sugerida:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$, pondo $u = \sqrt{x^2+3}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}$, pondo $u = \sqrt[3]{x+6}$

Propriedades do Limite

8 — Calcule os seguintes Limites:

a) $\lim_{x\to 3} x^2$

b) $\lim_{x\to 1} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

d) $\lim_{x\to -1} \dfrac{(x+1)^3}{x^3+1}$

e) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

f) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

g) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^4-5x-6}$

h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3+x^2}{3x^3+x^2+x}$

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$

k) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m e n são inteiros positivos)

9 — Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$

b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

c) $\lim_{x\to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}-2}$

d) $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$

e) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6}$

f) $\lim_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

g) $\lim_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

Limite Fundamental

10 — Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}(mx)}$

c) $\lim_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$

d) $\lim_{x\to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x-a}$

e) $\lim_{x\to 0} x \cot 3x$

f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}$

* g) $\lim_{x\to -2} \dfrac{\tan \pi x}{x+2}$

* h) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1-\tan x}$

11 — Ache a razão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para a função $y = \dfrac{1}{x}$

a) no ponto 2 e $\Delta x = 1$

b) no ponto 2 e $\Delta x = 0.1$

c) no ponto 2 e $\Delta x = 0.01$

12 — Para as seguintes funções calcule a derivada no ponto indicado através do limite do quociente de Newton:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

a) derivada de $f(x) = x$ no ponto $a = 0$

b) derivada de $f(x) = x$ no ponto $a = 1$

c) derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $a = 1$

d) derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $a = 2$

e) derivada de $f(x) = x^3$ no ponto $a = -1$

f) derivada de $f(x) = x^4$ no ponto $a = 0$

g) derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $a = 4$

h) derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $a = 8$

i) derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $a = 1$

j) derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $a = -1$

Limites Laterais

13 — Calcule os limites laterais:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 \text{ se } x \geq 1 \\ x^2 \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 \text{ se } x > 1 \\ x^2 \text{ se } x \leq 1 \end{cases}$$

e) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 \text{ se } x \geq 2 \\ 6x^2 \text{ se } x < 2 \end{cases}$$

Teorema do Confronto

14 — Suponha que $|g(x)| \leq x^4$, para todo x. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

15 — Calcule os seguintes limites usando o Teorema do Confronto:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\, 2^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

16 — Seja $f(x) = [\![x]\!]$ a função maior inteiro. Para quais valores de a existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?

17 — Existe um número a tal que o limite

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$$

existe? Caso afirmativo, encontre a e o valor do limite.

Teorema do Valor Intermediário

18 — Use o Teorema do Valor Intermediário para provar que existe uma raiz da equação no intervalo especificado:

a) $x^4 + x - 3 = 0 \quad (1,2)$

b) $\sqrt[3]{x} = 2x \quad (0,1)$

c) $\cos(x) = x \quad (0,1)$

d) $\ln x = e^{-x} \quad (1,2)$

19 — Use o Teorema do Valor Intermediário para provar que existe um número c tal que $c^2 = 2$. (Ou seja, demonstre a existência de $\sqrt{2}$)

Limites Laterais e Continuidade

20 — Seja $f(x) = x - [\![x]\!]$

a) Esboce o gráfico de $f(x)$

b) Se n for um inteiro calcule:

$$\lim_{x\to n^-} f(x) \qquad e \qquad \lim_{x\to n^+} f(x)$$

c) Para quais valores de a existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

21 — Encontre os valores da constante c para os quais a função f é contínua:

$$f(x) = \begin{cases} cx+1 \text{ se } x \leq 3 \\ cx^2 - 1 \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

22 — Encontre os valores da constante c para os quais a função f é contínua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - c \text{ se } x < 4 \\ cx + 20 \text{ se } x \geq 4 \end{cases}$$

23 — Em cada caso, determine L de modo que a função dada seja contínua no dado ponto a:

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ \\ L & \text{se} \quad x = 2 \end{cases} \qquad \text{em } a = 2.$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^4+3x-4} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ \\ L & \text{se} \quad x = 1 \end{cases} \qquad \text{em } a = 1.$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{x+1} & \text{se} \quad x \neq -1 \\ \\ L & \text{se} \quad x = -1 \end{cases} \qquad \text{em } a = -1.$$

Respostas dos Exercícios

1 **a.)**F; **b.)**V; **c.)**F; **d.)**V

2 **a.)**Qualquer $\delta \in (0, \frac{1}{20})$
b.) Qualquer $\delta \in (0, \frac{1}{40})$

3 **a.)**$\delta = \frac{\epsilon}{2}$ (ou menor)
b.)$\delta = \frac{\epsilon}{4}$ (ou menor)

4 **f.)**Dica: observe que, sendo $1 < \sqrt{x} + 2$, resulta $|\sqrt{x} - 2| < |\sqrt{x} - 2||\sqrt{x} + 2| = |x - 4|$.
g.) Dica: use a fórmula $\cos p - \cos q = 2 \operatorname{sen} \frac{q+p}{2} \operatorname{sen} \frac{q-p}{2}$.

7 **a.)**$\frac{1}{4}$
b.)$\frac{-1}{12}$

8 **d.)**0; **f.)**$3x^2$; **i.)**6; **k.)**m/n

9 **a.)**3/2; **c.)**$-2/3$; **f.)**1; **h.)**3/2

10 **a.)**4; **b.)**n/m; **c.)**$cos(a)$; **e.)**1/3; **g.)**π

11 **a.)**-1/6; **b.)**-5/21; **c.)**-50/201

12 **a.)**1; **b.)**1; **c.)**2; **d.)**4; **e.)**3; **f.)**0; **g.)**1/4; **h.)**1/12; **i.)**-1; **j.)**-1

13 **b.)**-1; **d.)**2; **e.)**3

14 0

17 15; -1.

20 **b.)**Dica 1: note que para valores de x menores que n e suficientemente próximos de n (quão próximos?), vale $[\![x]\!] = n-1$; Dica 2: note que para valores de x maiores que n e suficientemente próximos de n (quão próximos?), vale $[\![x]\!] = n$.

21 1/3

23 **a.)**12
b.)$\frac{3}{7}$
c.)-1