Lista 1 - Cálculo Vetorial e Tensorial - 2019.1 (atualizado 22/02/2019)

1. Dados vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e constantes $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que:
   (a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ e $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$
   (b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
   (c) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
   (d) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (uv)^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$, onde $u = \|\mathbf{u}\|$ e $v = \|\mathbf{v}\|$
   (e) $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = u^2 - v^2$
   (f) $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 2\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
   (g) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
   (h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$
   (i) (identidade de Jacobi) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} \times \mathbf{u} = 0$

2. Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ dos seguintes campos escalares:
   (a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \qquad (x, y) \neq (0, 0),$
   (b) $f(x, y) = \operatorname{atan}(y/x), \qquad x \neq 0.$

3. Seja $v(r, t) = t^n \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$. Calcule n para que o campo escalar v satisfaça a equação $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}\right)$.

4. Calcule o gradiente ∇f dos seguintes campos escalares:
   (a) $f(x, y) = x^2 + y\cos(xy)$,
   (b) $f(x, y) = e^{x^2} \sin y$,
   (c) $\ln(x^2 + 2y^3 - z^4)$,
   (d) Calcule $\|\nabla f\|$ para cada item acima.

5. Considere duas funções $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Prove que $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

6. Mostre que $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$.

7. Mostre que os operadores divergente e rotacional são *lineares*, ou seja, dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e constante $a \in \mathbb{R}$ segue-se que:
   (a) $\nabla \cdot (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v}$;
   (b) $\nabla \times (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{v}$.

8. Mostre que:
   (a) $\nabla \times (f\mathbf{u}) = f\nabla \times \mathbf{u} + (\nabla f) \times \mathbf{u}$;
   (b) $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$.

9. Calcule $\nabla \cdot \mathbf{u}$ e $\nabla \times \mathbf{u}$ para os seguintes campos vetoriais:
   (a) $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^3 + yz^2)\hat{\imath} + (y + xz)\hat{\jmath} + (z + xy)\hat{k}$;
   (b) $\mathbf{u}(x, y, z) = (z - 3y^2)\hat{\imath} + (3x - z)\hat{\jmath} + (y - 2x)\hat{k}$.

10. Mostre que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é solenoidal se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ambos irrotacionais. (Um campo vetorial é dito solenoidal se seu divergente for nulo.)

11. Se $\mathbf{u}$ é irrotacional (ou seja $\nabla \times \mathbf{u} = 0$), sendo $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$, mostre que $\mathbf{u} \times \mathbf{r}$ é solenoidal.

12. Defina o operador de momento angular $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$, onde as componentes são dadas por
$$L_x = -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$L_y = -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right),$$
$$L_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right).$$
   (a) Mostre que $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$;
   (b) Mostre que $L_xL_y - L_yL_x = iL_z$, $L_zL_x - L_xL_z = iL_y$, e que $L_yL_z - L_zL_y = iL_x$.

13. A velocidade de um fluido bidimensional é dada por $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = u(x, y)\hat{\mathbf{i}} - v(x, y)\hat{\mathbf{j}}$. Supondo que o fluido seja incompressível (ou seja, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) e irrotacional, prove que valem as *condições de Cauchy-Riemann*
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

14. Sejam f, g dois campos escalares diferenciáveis. Prove que $(\nabla f) \times (\nabla g)$ é solenoidal. Use o ex.8(b).

15. Prove que $\nabla \times (\phi\nabla\phi) = 0$, onde ϕ é um campo escalar diferenciável.

16. Considere o conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x, y) \neq (0, 0)\}$ e o campo vetorial $\mathbf{u} = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{j}}$, se $(x, y) \in S$. Mostre que $\nabla \times \mathbf{u} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{u}$.

17. Usando o ex. 1(a), mostre que se $\mathbf{u}$ é um vetor constante, então $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{u}$.

18. Mostre que:
   (a) $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{2}\nabla(u^2) - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$;
   (b) Se o potencial magnético $\mathbf{A}$ é dado por $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(u\nabla v - v\nabla u)$, então o campo magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ é dado por $\nabla u \times \nabla v$.

19. Se o potencial eletromagnético $\mathbf{A}$ é dado por $\mathbf{A} = \frac{yz}{r(x^2+y^2)}\hat{\mathbf{i}} - \frac{xz}{r(x^2+y^2)}\hat{\mathbf{j}}$, mostre que a indução magnética $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ é dada por $\mathbf{B} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$.