Lista 2 - Cálculo Vetorial e Tensorial - 2019.1 (atualizado 22/02/2019)

1. Um campo de forças $\vec{F}$ é dado por $\vec{F}(x,y) = cxy\hat{\mathbf{i}} + x^6y^2\hat{\mathbf{j}}$, onde c é uma constante positiva. Essa força age em uma partícula que se move do ponto (0,0) à reta $x = 1$, ao longo de uma curva $y(x) = ax^b$, onde $a > 0$ e $b > 0$. Encontre o valor de a como função de c, para que o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ seja independente de b.

2. Integre a função $\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$ sobre o caminho dado por $\mathbf{r}(t) = (t,t,t)$, onde $0 < a < t < b$.

3. Calcule $\int_C (x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$, onde C é a fronteira da região contida entre os círculos com centro na origem e raios 1 e 3, respectivamente.

4. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo dos respectivos caminhos indicados:
   (a) $f(x,y) = (x^2 - 2xy)\hat{\mathbf{i}} + (y^2 - 2xy)\hat{\mathbf{j}}$, entre os pontos $(-1,1)$ e $(1,1)$ ao longo da parábola $y = x^2$. (Resp.: $-14/15$).
   (b) $f(x,y) = (y^2 - z^2)\hat{\mathbf{i}} + 2yz\hat{\mathbf{j}} - x^2\hat{\mathbf{k}}$, ao longo da trajetória $\alpha(t) = t\hat{\mathbf{i}} + t^2\hat{\mathbf{j}} + t^3\hat{\mathbf{k}}$, $t \in [0,1]$.
   (c) $f(x,y,z) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + (xz - y)\hat{\mathbf{k}}$, ao longo do segmento de reta que liga (0,0,0) e (1,2,4).
   (d) $f(x,y,z) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + (xz - y)\hat{\mathbf{k}}$, ao longo da trajetória $\alpha(t) = t^2\hat{\mathbf{i}} + 2t\hat{\mathbf{j}} + 4t^2\hat{\mathbf{k}}$, $t \in [0,1]$.

5. Calcule $\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ onde C é o quadrado de vértices (1,0), (0,1), $(-1,0)$ e (0,–1), no sentido anti-horário. (Resp.: 0).

6. Calcule $\int_C 2x\,ds$, onde C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de (0,0) a (1,1), seguido de um segmento de reta vertical C_2 de (1,1) a (2,2). (Resp.: $\frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 2$).

7. Defina o conjunto $T = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)\,|, y = 0, x \leq 0\}$. Se $(x,y) \in T$, considere $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$.
   (a) Prove que θ é dado por
   $$\theta = \begin{cases} \operatorname{atan}\frac{y}{x}, & \text{se} \quad x > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se} \quad x = 0, \\ \operatorname{atan}\frac{y}{x} + \pi, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$
   (b) Mostre que
   $$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

8. Calcule $\int_C x^3 ds$, onde C é formada:
   (a) pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de (0,0) a (1,1), seguido de um segmento de reta vertical C_2 de (1,1) a (2,2).
   (b) pela elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

9. Mostre que $\oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0$, onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição e C é uma curva de Jordan.

10. Dados f e g dois campos escalares definidos em $\mathbb{R}^3$, mostre que dada C uma curva de Jordan,
   $$\oint_C f(\nabla g) \cdot d\mathbf{r} = -\oint_C g(\nabla f) \cdot d\mathbf{r}$$
   e consequentemente mostre que
   $$\oint_{\partial S} f(\nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \int\int_S [(\nabla f) \times (\nabla g)] \cdot \hat{\mathbf{n}}\,dS$$

11. Seja Γ o quadrado de vértices em $(0,0), (2,0), (2,2)$ e $(0,2)$. Seja o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = (y^2, x)$. Calcule $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

12. Seja Γ a fronteira do quadrado $[0,1] \times [0,1]$, orientada no sentido positivo. Calcule:
   (a) $\oint_\Gamma \frac{2y+\sin x}{1+x^2}dx + \frac{x+e^y}{1+y^2}dy$;
   (b) $\oint_\Gamma (3x^4 + 5)dx + (y^2 + 3y^2 - 1)dy$.

13. Mostre que $\oint_C ydx + xdy = 0$ para qualquer curva fechada simples C.

14. Dado um campo vetorial $\vec{F} = P\hat{\mathbf{i}} + Q\hat{\mathbf{j}}$, onde $P(x,y) = xe^{-y^2}$ e $Q(x,y) = -x^2ye^{-y^2} + 1/(x^2+y^2)$, calcule a integral $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$, onde C é a fronteira de um quadrado de lado $2a$ em torno da origem, percorrida em sentido anti-horário.

15. Calcule a área interna a um cardióide, cuja equação polar é dada por $r = a(1 - \cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

16. Considere
   $$\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$
   Mostre que:
   (a) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$ para qualquer curva fechada simples C orientada no sentido positivo que contenha a origem.
   (b) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para qualquer curva fechada simples C orientada no sentido positivo que não contenha a origem.