Lista 3 - Cálculo Vetorial e Tensorial - 2019.1 (atualizado 22/02/2019)

1. Calcule a área do toro descrito pela equação

   $$\mathbf{r}(u,v) = (a+b\cos u)\sin v\hat{\mathbf{i}}+(a+b\cos u)\cos v\hat{\mathbf{j}}+b\sin u\hat{\mathbf{k}},$$

   onde $0 < b < a$ e $0 \leq u < 2\pi$, $0 \leq v < 2\pi$.

2. Considere o campo vetorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através da esfera S^2, cuja normal no ponto (0,1,0) tem segunda componente positiva.

3. Verifique o Teorema de Stokes para o campo $\mathbf{F}(x,y,z) = y\hat{\mathbf{i}} + z\hat{\mathbf{j}} + x\hat{\mathbf{k}}$, onde S é a porção do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$, e $\hat{\mathbf{n}}$ é a normal com componente z não-negativa.

4. Dados vetores $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ e $P\hat{\mathbf{i}} + Q\hat{\mathbf{j}} + R\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{u} \times \mathbf{r}$, onde $\mathbf{u}$ é um vetor constante, mostre que $\int_C P dx + Q dy + R dz = 2\int\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS$, onde $C = \partial S$ e $\mathbf{n}$ é a normal à superfície S.

5. Mostre que:

   $$\int\int_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dS = \int\int\int_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dxdydz.$$

6. Mostre que $\int\int_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n}\right) dS = \int\int_S \left(g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dS$ quando f e g forem funções harmônicas.

7. Calcule o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $\mathbf{F}(x,y,z) = (x - y - 4, y, z)$, através do hemisfério norte de uma esfera.

8. Calcule $\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, onde $\mathbf{F} = -z\hat{\mathbf{k}}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com $\mathbf{n}$ sendo o vetor normal apontando para fora da esfera.

9. Calcule o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (xz, yz, -z^2)$ para fora da superfície S dada por

   $$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = 1 + x^2 + y^2,\ 2 \leq z \leq 3\}$$

10. Um campo escalar ϕ satisfaz as equações $\|\nabla\phi\| = 4\phi$ e $\nabla \cdot (\phi\nabla\phi) = 10\phi$. Calcule $\int\int_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$, onde S é a esfera S^2, n é a normal à esfera e $\frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla f \cdot n$.

11. Considere um filtro de ar cuja forma é aproximadamente a do conjunto

    $$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 4\},$$

    e que está imerso numa corrente de ar cujo campo de velocidades é dado pela expressão

    $$\mathbf{F}(x,y,z) = (2yz\ \exp(y^2), 2xz\ \exp(x^2), -2 + xy).$$

    Mostre que a quantidade de ar no interior do filtro se mantém constante, supondo que a densidade do ar é constante e igual a 1. Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de ar que sai através da parede circular do filtro.

12. Considere a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por $z = (x^2 + y^2)^2$, com $x^2+y^2 < 1$ e com densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = \sqrt{1 + 16(x^2 + y^2)^3}$ kg/m^3. Calcule a massa total de S.

13. Calcule a área da seção de um cone retangular, à alturas a e b.

14. Calcule $\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, onde $\mathbf{F} = -x\hat{\mathbf{i}} + 2z\hat{\mathbf{k}}$ e S é a fronteira com região limitada por $z = 1$ e $z = x^2+y^2$, com $\mathbf{n}$ exterior a S.