Lista 5 - Cálculo Vetorial e Tensorial - 2019.1 (atualizado 22/02/2019)

1. Defina coordenadas parabólicas pelas transformações $x = uv\cos\theta$, $y = uv\sin\theta$, e $z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, com $u \in [0,\infty)$, $v \in [0,\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. A partir disso:
   (a) Defina os versores $\hat{u}, \hat{v}$ e $\hat{\theta}$ como aqueles que apontam nas direções de crescimento das respectivas variáveis. (Tais versores são os vetores são $\mathbf{e}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\mathbf{e}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, e $\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$ normalizados.)
   (b) Calcule o jacobiano e o elemento de volume dV nessas coordenadas;
   (c) Calcule as transformações inversas $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$, e $\theta = \theta(x,y,z)$;
   (d) Calcule a métrica em coordenadas parabólicas. A métrica é ortogonal?
   (e) Calcule os fatores de escala h_u, h_v e h_θ;
   (f) Calcule o gradiente, o divergente, o rotacional e o laplaciano nessas coordenadas;
   (g) Tal sistema de coordenadas é dextrógiro ou levógiro?

2. Repita o exercício 1 usando coordenadas esféricas ao invés de parabólicas.

3. Sejam r, θ, z coordenadas cilíndricas usuais. Ondas eletromagnéticas tranversas (ou seja, que não possuem componente $\hat{\mathbf{k}}$) em um guia de onda possuem campo elétrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}(r,\theta)e^{i(kz-\omega t)}$ e indução magnética $\mathbf{B} = \mathbf{B}(r,\theta)e^{i(kz-\omega t)}$. Ambos os campos satisfazem a equação de Laplace, isto é
$$\nabla^2 \mathbf{E}(r,\theta) = \mathbf{0} = \nabla^2 \mathbf{B}(r,\theta)\,.$$
   Mostre que:
   (a) $\mathbf{E} = \hat{r}E_0\frac{a}{r}\; e^{i(kz-\omega t)}$ e $\mathbf{B} = \hat{\theta}E_0\frac{a}{r}\; e^{i(kz-\omega t)}$ são soluções da equação de Laplace. Aqui a é o raio do condutor e E_0 e B_0 são amplitudes constantes;
   (b) As equações de Maxwell são satisfeitas se o interior do guia de onda é um ambiente de vácuo e
$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{k}{\omega} = \mu_0\epsilon_0\left(\frac{\omega}{k}\right) = \frac{1}{c}\,.$$

4. Mostre que
$$-i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \theta}\,,$$
   em coordenadas esféricas.

5. Resolva a equação de Laplace $\nabla^2 f = 0$, onde $f = f(\rho)$ é um campo escalar de classe C^2, e ρ denota o raio, em coordenadas cilíndricas.

6. Sejam ρ, θ, z as coordenadas cilíndricas usuais. Calcule o rotacional do campo $\mathbf{v} = v_\rho(\rho,\theta)\,\hat{\rho} + v_\theta(\rho,\theta)\,\hat{\theta}$.

7. Um fio ao longo do eixo z transporta uma corrente I. O potencial vetorial magnético é dado por
$$\mathbf{A} = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)\hat{\mathbf{k}}\,.$$
   Mostre que a indução magnética é $\mathbf{B} = \frac{\mu I}{2\pi\rho}\,\hat{\theta}$.

8. A radiação dipolar elétrica tem campos elétrico (abaixo, a_E e a_B são constantes)
$$\mathbf{E} = a_E\sin\theta\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\,\hat{\theta}, \qquad \mathbf{B} = a_B\sin\theta\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\,\hat{\phi}\,.$$
   Mostre que as equações de Maxwell são satisfeitas se
$$\frac{a_E}{a_B} = \frac{\omega}{k} = c = (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}.$$
   (Dica: descarte os tempos de ordem $1/r^2$ em diante, uma vez que as expressões para $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ só valem para distância grandes em relação à fonte).

9. Expresse $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}$ em coordenadas esféricas.

10. Mostre que $\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \phi}$, em coordenadas esféricas.

11. O fluxo de calor na coroa solar obedece a equação $\nabla \cdot (k\nabla T) = 0$, onde T denota a temperatura. Aqui $k \propto T^{5/2}$ denota a condutividade térmica. Admitindo-se que $T(r) \propto r^n$, mostre que a equação de fluxo de calor é satisfeita por $T = T_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2/7}$.

12. Em coordenadas esféricas, um campo de força é dado por
$$\vec{F} = \hat{\mathbf{r}}\frac{2P\cos\theta}{r^3} + \hat{\theta}\frac{P\sin\theta}{r^3}, \qquad r \geq P/2\,.$$
   Calcule $\nabla \times \vec{F}$ e determine se existe ou não um potencial escalar para $\vec{F}$. O campo $\vec{F}$ é conservativo?

13. Usando coordenadas esféricas, mostre que $\vec{A} = -\hat{\phi}\frac{\cot\theta}{r}$ é solução de $\nabla \times \vec{A} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$. Dica:
$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1 h_1 & \hat{\mathbf{q}}_2 h_2 & \hat{\mathbf{q}}_3 h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1V_1 & h_2V_2 & h_3V_3 \end{vmatrix}.$$