Universidade Federal do ABC

Lista 7 - Cálculo Vetorial e Tensorial - 2019.1 (atualizado 22/02/2019)

1. Os símbolos de Christoffel são dados por os símbolos de Christoffel, dados por $\Gamma^{\ell}_{ki} = \frac{1}{2} g^{\ell j} \left(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}\right)$. Calcule-os para as coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, justificando todos os passos. Será útil calcular os coeficientes da métrica que mune o espaço V, dada por $g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ $(i, j = 1, 2)$.

2. Considere o tensor eletromagnético dado por

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcule $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}(\star F^{\mu\nu})$;
   (b) Calcule $\partial^{\mu} F_{\mu\nu}$.

3. Considere $\{x, y, z\}$ coordenadas em $\mathbb{R}^3$ e d a derivada exterior. Calcule:
   (a) $d(x\, dx \wedge dy)$
   (b) $d(e^{xyz}\, dz)$
   (c) $d(\cos(x)\, dy + \sin(y) dz)$

4. Existe uma função escalar $f = f(x, y, z)$ tal que a diferencial de f seja igual a $yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz$?

5. O operador de permutação $P : T_2(V) \to T_2(V)$ é definido por $P(\alpha \otimes \beta) = \beta \otimes \alpha$, e o operador identidade é dado por $\mathrm{id}(\alpha \otimes \beta) = \alpha \otimes \beta$. Defina os operadores $\mathrm{ALT} = \frac{1}{2}(\mathrm{id} - P)$ e $\mathrm{SIM} = \frac{1}{2}(\mathrm{id} + P)$. Prove que:
   (a) $\mathrm{ALT} \circ \mathrm{ALT} = \mathrm{ALT}$ e $\mathrm{SIM} \circ \mathrm{SIM} = \mathrm{SIM}$;
   (b) $\mathrm{ALT} \circ \mathrm{SIM} = 0 = \mathrm{SIM} \circ \mathrm{ALT}$;
   (c) $\mathrm{ALT} + \mathrm{SIM} = \mathrm{id}$.

6. Dado um tensor A^{ijk} em $\mathbb{R}^2$, calcule a sua componente $A^{112'}$ em um sistema de coordenadas rodado por um ângulo θ.

7. As componentes do tensor de Riemann são expressas a partir dos símbolos de Christoffel como

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}.$$

   Calcule a componente $R^{1}{}_{212}$ na superfície esférica $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
   (**Dica 1**: os índices $\rho, \sigma, \mu, \nu, \lambda$ podem assumir os valores 1 e 2, onde $\partial_1 = \partial_\theta$ e $\partial_2 = \partial_\phi$.)
   (**Dica 2**: as únicas componentes não-nulas dos símbolos de Christoffel em S^2 são dadas por $\Gamma^1_{22} = \sin\theta\cos\theta$ e $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot\theta$.)
   (**Dica 3**: escreva a equação acima para $R^{1}{}_{212}$, e depois substitua os símbolos de Christoffel em tal expressão... e calcule.)

8. Considere a métrica de Robertson-Walker (em espaços de curvatura nula):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right).$$

   Calcule as seguintes componentes do tensor de Riemann nesse caso: $R^{0}{}_{\mu 0 \mu}$ (para todos os μ possíveis) e $R^{1}{}_{i1i}$ (primeiro para $i = 1$ e depois para $i = 2$).

9. Dado $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, escreva ds^2 em termos das coordenadas do cone de luz

$$x^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(ct \pm x)$$

10. (Optativo!) Mostre que a métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

   satisfaz as equações de Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0$.