Lista 2

Funções de Uma Variável

Derivadas II

Derivadas de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas

1 — Calcule as seguintes derivadas

a) $e^{\operatorname{sen} x}$
b) $\ln(1+x^2)$
c) x^x
d) $\cos(x)^x$
e) $\operatorname{senh}(x)^{\operatorname{tgh}(x)}$
f) $x^\pi + \pi^x$
g) $(2x+1)^x$
h) $\ln(\ln(\ln(x)))$
i) $\ln(x)^x$
j) x^{e^x}
k) $x^{\cosh(x)}$
* l) x^{x^x}

2 — Prove que

a) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cossec}(x)) = -\operatorname{cossec}(x)\operatorname{cotg}(x)$
b) $\frac{d}{dx}(\sec(x)) = \sec(x)\operatorname{tg}(x)$
c) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg}(x)) = -\operatorname{cossec}^2(x)$
d) $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e) $\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
f) $\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$
g) $\frac{d}{dx}\operatorname{arccossec}(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

3 — Calcule as seguintes derivadas

a) $\operatorname{tgh}(4x)$
b) $\operatorname{senh}(x^3+3x)$
c) $\operatorname{senh}(x)\operatorname{tgh}(x)$
d) $e^{\cosh x}$
e) $x^2\operatorname{senh}(3x)$
f) $\operatorname{arcsen}(x^3)$
g) $\arccos(\operatorname{sen}(x))$
h) $\operatorname{arccossec}(\cos(x))$

Aplicações da Derivada

4 — O deslocamento de uma partícula sobre uma corda vibrante é dado pela equação

$$y(t) = 10 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(10\pi t)$$

a) Encontre a velocidade da partícula após t segundos
b) Em quais instantes de tempo a partícula está parada?

5 — O movimento de uma mola sujeita a uma força de atrito é frequentemente modelado pelo produto de uma função exponencial e uma função seno. Suponha que a equação do movimento de um ponto sobre essa mola é

$$s(t) = 2e^{-\frac{t}{2}}\operatorname{sen}(t)$$

onde s é medida em centímetros e t em segundos.

a) Encontre a velocidade após t segundos.
b) Encontre os instantes de tempo nos quais a partícula se encontra em repouso e a respectiva posição nesses instantes.
c) Mostre que $\lim_{t\to\infty} s(t) = 0$. Interprete o significado desse limite.

6 — Uma escada com 10m de comprimento está apoiada numa parede vertical. Seja θ o ângulo entre o topo da escada e a parede e x a distância da base da escada até a parede. Se a base da escada escorregar para longe da parede, com que rapidez x variará em relação a θ quando $\theta = \pi/3$?

7 — Cristais de clorato de sódio são fáceis de crescer no formato de cubos permitindo uma solução de água e clorato de sódio evaporar vagarosamente. Se V for o volume de cada cubo com comprimento de lado x:

a) Calcule $\dfrac{dV}{dx}$ quando $x = 3mm$ e explique seu significado.
b) Mostre que a taxa de variação do volume de cada cubo em relação ao comprimento da aresta é igual a metade da área da superfície do cubo.

8 — Uma pedra caiu dentro de um lago, produzindo uma ondulação circular que cresce a uma velocidade radial de $60m/s$. Encontre a taxa segundo conforme a qual a área dentro do círculo está crescendo depois de a) $1s$ b) $3s$ c) $5s$. O que você pode concluir?

9 — A lei de Boyle estabelece que quando uma amostra de gás é comprimida a uma temperatura constante, o produto da pressão e do volume permanece constante: $PV = C$

a) Encontre a taxa de variação do volume em relação a pressão.
b) Uma amostra de gás está em um recipiente a baixa pressão e é regularmente comprimida a temperatura constante por $10min$. O volume decresce mais rapidamente no início ou final dos 10 minutos. Explique.

10 — Em uma fazenda de piscicultura, uma população de peixes é colocada dentro de um lago e colhida regularmente. Um modelo para a variação da população é dada pela equação:

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

onde r_0 é a taxa de nascimento dos peixes, P_c é a população máxima que o pequeno lago pode manter (*capacidade de suporte*) e β é a percentagem da população que é colhida.

a) Qual o valor de $\dfrac{dP}{dt}$ corresponde à população estável?
b) Se o pequeno lago pode manter 10000 peixes a taxa de nascimento é 5% e a taxa de colheita é de 4% encontre o nível estável da população.
c) O que acontece se β é elevado a 5%?

Derivação Implícita

11 — Encontre dy/dx diferenciando implicitamente

a) $x^2 + y^2 = 1$
b) $x^2y + xy^2 = 3x$
c) $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$
d) $x\,\text{sen}(y) + \cos(2y) = \cos(y)$
e) $x^y = y^x$
f) $y = \ln(x^2 + y^2)$

12 — Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado

a) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ no ponto $(-5, 9/4)$
b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ no ponto $(-1, 4\sqrt{2})$
c) $y^2 = x^3(2-x)$ no ponto $(1, 1)$

13 — A função $y = f(x)$, $y > 0$ é dada implicitamente por $x^2 + 4y^2 = 2$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto de abscissa 1.

14 — Mostre, fazendo a diferenciação implícita, que a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

15 — Mostre que a soma dos interseptos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c.

16 — Encontre as equações das retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que passa através do ponto $(12, 3)$

17 — A água flui a partir de um tanque cuja área de secção transversal é constante e igual a $50m^2$. Localizado na parte inferior do tanque, existe um orifício cuja secção é sempre $14m^2$. Inicialmente, a altura da água no tanque era de 20m e t segundos mais tarde, era dada pela a equação

$$2\sqrt{h} + \frac{1}{25}t - 2\sqrt{20} = 0 \quad 0 \leqslant t \leqslant 50\sqrt{20}$$

Quão rápido a altura da água está diminuindo no instante em que ela vale 9m?

Respostas dos Exercícios

1 **a.)** $e^{\operatorname{sen}(x)}\cos(x)$ **b.)** $\frac{2x}{x^2+1}$ **c.)** $x^x(1+\ln(x))$
d.) $((\cos x)^x) * (\ln(\cos x) - x \operatorname{tg} x)$".
e.) $\operatorname{senh}^{\operatorname{tgh}(x)}(x)\left(\operatorname{sech}^2(x)\ln(\operatorname{senh}(x))+1\right)$
f.) $\pi x^{\pi-1} + \pi^x \ln(\pi)$
h.) $\frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$

2 **a.)** Use a definição de cossec e a regra do quociente.
b.) Use a definição de sec e a regra do quociente.
d.) Utilizando derivação implícita.

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{sen} y = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Derivando implicitamente,

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

Como $1 = \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = \cos^2 y - x^2$.

Como $\cos y \geqslant 0$ para $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, concluímos que

$$\operatorname{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

e.) Análogo ao anterior.

f.) Se $y = \operatorname{arctg} x$ então $\operatorname{tg} y = x$. Derivando implicitamente temos:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} y = \frac{d}{dx}x$$

O lado esquerdo fica:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} y = \frac{d}{dx}\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}$$

$$= \frac{\frac{dy}{dx}\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y \frac{dy}{dx}}{\cos^2 y} = \frac{dy}{dx}\left(1+\operatorname{tg}^2 y\right)$$

Enquanto que o lado direito:

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

Assim

$$\frac{dy}{dx}(1+\operatorname{tg}^2 y) = 1$$

Substituindo $x = \operatorname{tg} y$ temos

$$\frac{dy}{dx}(1+x^2) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

3 **a.)** Usando a regra da Cadeia: $4\operatorname{sech}^2(4x)$. **b.)** Usando a regra da Cadeia: $\left(3x^2+3\right)\cosh\left(x^3+3x\right)$. **c.)** Usando a derivada do produto $\cosh(x) * \operatorname{tgh}(x) + \operatorname{sech}^2(x) * \operatorname{senh}(x)$ **d.)** Usando a regra da Cadeia: $e^{\cosh x}\operatorname{senh} x$

4 **a.)** Derivando: $y' = 5\pi\cos(10\pi t)$ **b.)** Igualando a zero e resolvendo: $\pm\frac{1}{20} + \frac{k}{5}$, com $k \in \mathbb{Z}$

5 **a.)** $2e^{-\frac{t}{2}}\cos(t) - e^{-\frac{t}{2}}\operatorname{sen}(t)$ **b.)** $-\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + k\pi$ e $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + k\pi$

6 5m/rad

9 a) $\dfrac{dV}{dP} = -\dfrac{V}{P}$ b) No início.

11 **a.)** $-\frac{x}{y}$
b.) $\frac{-2xy-y^2+3}{x(x+2y)}$
c.) $\frac{y(-\sqrt{x+y})-\sqrt{xy}}{x\sqrt{x+y}+\sqrt{xy}}$
d.) $\operatorname{sen} y/(2\operatorname{sen}(2y) - \operatorname{sen} y - x\cos y)$
e.) $\frac{y(yx^y - xy^x\log(y))}{x(xy^x - yx^y\log(x))}$

12 **a.)** Derivando implicitamente temos: $y' = (9x)/(16y)$ logo o coeficiente angular é $-5/4$ e a equação da reta é $y = 15/4 - 5/4(x+5)$

b.) Derivando implicitamente temos: $y' = -\frac{26x}{9y}$ logo o coeficiente angular é $-\frac{9}{64\sqrt{2}}$

13 Derivando implicitamente temos $y' = -(x/(4y))$. Quando $x = 1$ temos que $y = 1/2$. Logo $y'(1) = -1/2$ e a reta tangente é

$$y = 1/2 - 1/2(x-1)$$

15 Derivando implicitamente temos $y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$. Logo a reta tangente ao ponto (a,b) é $b - \frac{\sqrt{b}(x-a)}{\sqrt{a}}$

Logo a soma dos interseptos é $2\sqrt{a}\sqrt{b} + a + b = c$

17 Derivando implicitamente temos:
$h' = -\frac{1}{25}\sqrt{h(t)}$ e quando $h = 9$ temos $h' = -3/25$