Lista 3

Funções de Uma Variável

Derivadas III

Taxas Relacionadas

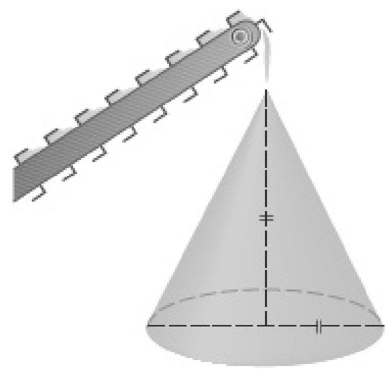
1 — Se uma bola de neve derrete de tal forma que sua área de superfície decresce a uma taxa de $1\mathrm{cm}^2/\mathrm{min}$, encontre a taxa segundo a qual o diâmetro decresce quando o diâmetro é $10\mathrm{cm}$.

2 — Dois carros iniciam o movimento no mesmo ponto. Um viaja para o sul a $60\mathrm{km}/\mathrm{h}$ e o outro para oeste a $25\mathrm{km}/\mathrm{h}$. A que taxa está crescendo a distância entre os carros duas horas depois?

3 — A água está vazando de um tanque cônico invertido a uma taxa de $10.000\mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$. Ao mesmo tempo está sendo bombeada água para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem $6\mathrm{m}$ de altura e o diâmetro no topo é $4\mathrm{m}$. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de $20\mathrm{cm}/\mathrm{min}$ quando a altura da água for $2\mathrm{m}$, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada dentro do tanque.

4 — Um tanque de água tem a forma de um cone circular invertido com base de raio 2m e altura igual a 4m. Se a água está sendo bombeada dentro do tanque a uma taxa de $2\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$, encontre a taxa na qual o nível da água está elevando quando a água está a 3m de profundidade.

5 — Uma esteira transportadora está descarregando cascalho a uma taxa de $30\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ formando uma pilha na forma de cone com diâmetro da base e da altura sempre iguais. Quão rápido está crescendo a altura da pilha, quando sua altura é de $10\mathrm{m}$.



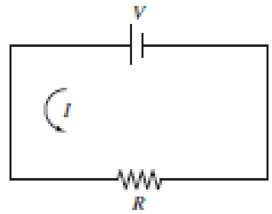
6 — O ponteiro dos minutos de um relógio mede $8\mathrm{mm}$, enquanto o das horas tem $4\mathrm{mm}$ de comprimento. Quão rápido está variando a distância entre as pontas dos ponteiros quando o relógio está marcando 1 hora?

7 — Uma escada com $10\mathrm{m}$ de comprimento está apoiada contra uma parede vertical. Se a base da escada desliza afastando-se da parede a uma velocidade de $2\mathrm{m}/\mathrm{s}$. Quão rápido está variando o ângulo entre o topo da escada e a parede quando o ângulo é $\pi/4$?.

8 — Circuito Elétrico A tensão V em volts (V) em um circuito elétrico está relacionada com o a corrente em amperes (A) e a resistência R, em ohms pela equação de

$$V = IR.$$

Quando V= 12, I=2, V está aumentando a uma taxa de 2 V/seg, e I está crescendo a uma taxa de 12 A / seg, a que taxa a resistência está mudando?



Diferenciais e Aproximações Diferenciais

9 — Ache a linearização de $f(x) = \sqrt{x+3}$ em $a = 1$ e use essa expressão para aproximar $\sqrt{3.9}$ e $\sqrt{4.1}$.

10 — Ache a linearização de $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ em $a = 0$ e use essa expressão para aproximar $\sqrt{0.95}$ e $\sqrt{1.05}$.

11 — O lado de um cubo é medido com um erro máximo possível de 2%. Use diferenciais para estimar o percentagem de erro máxima no volume computado.

12 — O período de um pêndulo simples é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

sendo L o comprimento do pêndulo, g a aceleração de gravidade e T é medido em segundos. Suponha que o comprimento do pêndulo é medido com um erro máximo de 0.5%. Qual a percentagem de erro máximo no período?

Máximos e Mínimos

13 — Encontre os pontos críticos da função:

a) $f(x) = 5x^2 + 4$
b) $f(\theta) = \theta + \text{sen}(\theta)$
c) $f(x) = |2x + 3|$
d) $f(x) = xe^{2x}$
e) $f(x) = x\ln(x)$
f) $f(t) = \sqrt{t}(1-t)$
g) $g(t) = 5t^{2/3} + t^{5/3}$

14 — Suponha que f seja uma função contínua no intervalo $[a, b]$

a) f possui máximos e mínimos globais nesse intervalo? Justifique?
b) Como podemos encontrar esses pontos?

15 — Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de f no intervalo dado:

a) $f(x) = \frac{x^4-4}{x^2+1}$ no intervalo $[-4, 4]$
b) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ no intervalo $[-1, 2]$
c) xe^{-x} no intervalo $[0, 2]$
d) $\frac{\ln(x)}{x}$ no intervalo $[1, 3]$

16 — Prove que a função $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ não tem máximos nem mínimos locais.

17 — Encontre os valores máximos e mínimos **globais** de f no intervalo dado:

a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ no intervalo $[-3, 2]$
b) $g(x) = \frac{x}{x+1}$ no intervalo $[1, 2]$
c) $h(x) = \sqrt{9-x^2}$ no intervalo $[-1, 2]$
d) $f(t) = \text{sen}(t) + \cos(t)$ no intervalo $[0, \pi/3]$
e) $f(x) = x - 3\ln(x)$ no intervalo $[1, 4]$
f) $h(t) = \ln(t)/t$ no intervalo $[1, 3]$

18 — Suponha que f seja uma função contínua no intervalo (a, b)

a) Diga algumas condições para que f possua máximos e mínimos globais nesse intervalo? Justifique?

19 — Encontre os valores máximos e mínimos **globais** de f (se existirem) no intervalo dado:

a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ no intervalo $(0, \infty)$

b) $g(x) = \sqrt{9 + x^2}$ no intervalo $(-\infty, \infty)$

c) $h(x) = x^5 - 7x^2 + 2$ no intervalo $(-\infty, \infty)$

d) $k(x) = \ln(x) - x$ no intervalo $(0, \infty)$

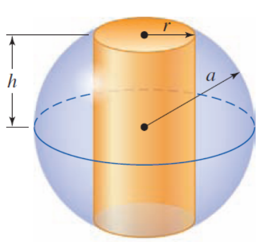
e) $m(x) = 1/(x - x^2)$ no intervalo $(0, 1)$

20 — Encontre o ponto da hipérbole $y^2 - x^2 = 4$ que está mais próximo do ponto $(2, 0)$.

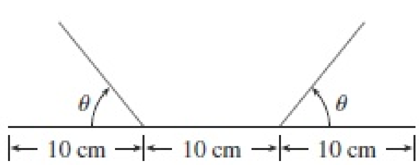
21 — Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

22 — Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito num cone reto com 20cm de altura e 12 cm de raio.

23 — Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre o cilindro de maior volume possível.

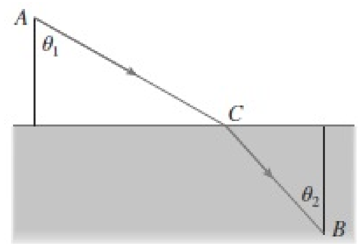


24 — Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30cm dobrando-se para cima 1/3 da folha de cada lado, fazendo-se um ângulo θ com a horizontal. Como deve ser escolhido θ de forma que a capacidade de carregar a água na calha seja máxima?



25 — Seja v_1 a velocidade da luz no ar e v_2 a velocidade da luz na água. De acordo com o principio de Fermat um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre que

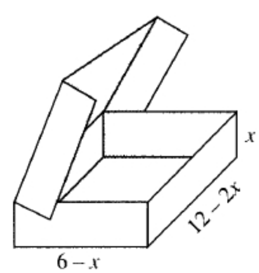
$$\frac{\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$



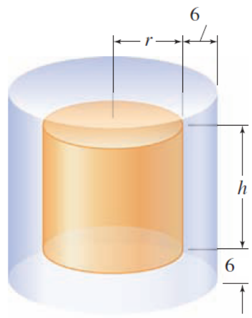
26 — Uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um quadrado de 60cm de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa pode ter.

27 — Uma lata cilíndrica sem topo é feita para receber $V\text{cm}^3$ de líquido. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para fazer a lata.

28 — Uma caixa com tampa conforme a figura abaixo é feita a partir de uma folha de papel de 12cmx12cm. Encontre a caixa que optimiza o volume.



29 — Um recipiente cilíndrico para armazenar resíduos radioativos deve ser construído a partir de chumbo e têm um espessura de 6 cm. (veja a figura). Se o volume do cilindro externo é de $16\pi m^3$, encontre o raio e a altura do cilindro interno que vai resultar em um recipiente de máxima capacidade de armazenamento.


6
r
h
6

Respostas dos Exercícios

1 Escreva o área em função do diâmetro. Derive implicitamente em função do tempo. Use que $dA/dt = 1$ e $d = 10$.

$d' = 1/(20\pi)$

2 Escreva as posições dos carros em função do tempo. Calcule a distância em função do tempo.

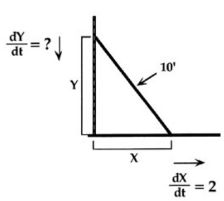
Taxa=$65km/h$

4 Sejam V, r e h o volume da água, o raio da superfície e a altura no instante t. Sabemos que $\frac{dV}{dt} = 2$ queremos achar $\frac{dh}{dt}$ quando $h = 3$. Temos que h e V estão relacionadas pela equação: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Por semelhança de triângulos $\frac{r}{h} = \frac{2}{4}$ logo $r = h/2$. Substituindo na expressão para V, obtemos $V = \frac{1}{3}\pi\frac{h^2}{2}h = \frac{\pi}{12}h^3$. Agora, derivando com relação a t,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt} \qquad \Longrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}.$$

Substituindo $h = 3$, $\frac{dV}{dt} = 2$, temos $\frac{dh}{dt} = \frac{8}{9\pi}$.

7



Relação $10^2 + x^2 + y^2$

9 Linearização $\frac{x+7}{4}$

em $x = 0,9$ $\sqrt{3.9} \approx 1.975$

10 Aproximação linear $1 - x/3$.

Para $x = 0,05$ então $\sqrt[3]{1 - 0,05} \approx 0,983333$

13 **a.)** 0 **b.)** $\pm\pi r + 2\pi k$ **c.)** $-\frac{3}{2}$ **d.)** $-\frac{1}{2}$

14 **a.)** Leia o Teorema de Weierstrass. **b.)** Leia o Teorema de Fermat.

15 **a.)** Ponto de máximo $x = -4$, valor máximo 252/17. Ponto de Mínimo $x = 0$, valor mínimo -4.

b.) Ponto de máximo $x = 2$ e ponto de mínimo $x = -1$.

d.) Ponto de máximo $x = e$ e ponto de mínimo $x = 1$

16 Estude o sinal da derivada.

17 **a.)** Máximo $x = -3$. Valor Máximo 47.

Mínimo $x = -\sqrt{2}$. Valor Mínimo -2 **b.)** Máximo $x = 2$. Valor Máximo 2/3.

Mínimo $x = 1$. Valor Mínimo 1/2

d.) Máximo $x = -2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(1 - \sqrt{2}\right)$.

Mínimo $x = 0$.

19 **a.)** Não tem máximo. Não tem mínimo

b.) Mínimo $x = 3$ Não tem máximo.

d.) Máximo $x = 1$. Valor máximo -1 Não tem mínimo

20 Como $\sqrt{x}$ é monótona crescente. Minimizar a distância

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

é equivalente a minimizar

$$d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Mínimo em $x = 1$.

23 O volume do cilindro é dado por

$$V = \pi r^2 h$$

e por Pitágoras temos a seguinte relação entre o raio e a altura:

$$r^2 + (h/2)^2 = R^2$$

Logo a expressão do volume em função da altura é

$$V(h) = \pi h(R^2 - (h/2)^2) = -((h^3\pi)/4) + h\pi R^2$$

Como o cilindro está contido na esfera, temos que os valores de h estão no intervalo $[0, R]$. Assim, temos um problema de extremos em um intervalo fechado, e consequentemente temos a existência de um máximo. Esse máximo ocorrerá ou nos pontos extremos do intervalo ou nos pontos críticos.

Como $V(h)$ é diferenciável, os pontos críticos são os pontos de derivada iguais a 0. Derivando

$$V'(h) = -((h^2\pi)/2) + \pi(-(h^2/4) + R^2)$$

Resolvendo $V'(h) = 0$ temos:

$$h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

Como

$$r^2 + (h/2)^2 = R^2$$

temos que

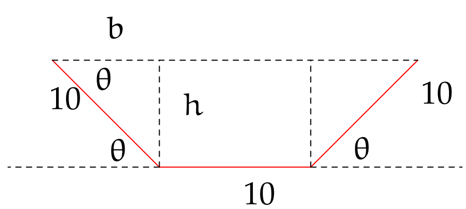
$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$$

e assim

$$\frac{h}{r} = \sqrt{2}$$

24 Neste caso, queremos maximizar o volume que uma calha pode suportar. Primeiramente observamos que o volume de uma calha desta forma é a área de seção transversal vezes comprimento da calha. Assim, para um determinado comprimento, a fim de maximizar o volume devemos maximizar a área da seção transversal.

Para obter uma fórmula para a área da seção transversal vamos refazer o desenho acima um pouco.



A área seccional pode ser obtida somando a área do retângulo e as áreas dos triângulos. Como $b = 10\cos\theta$ e $h = 10\,\text{sen}\,\theta$ temos:

$$A = 10h + 2\left(\frac{1}{2}bh\right) = 100\,\text{sen}\,\theta + (10\,\text{sen}\,\theta)(10\cos\theta)$$

$$A = 100(\text{sen}\, + \theta\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)$$

Podemos assumir que θ pertence ao intervalo $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

Calculando a derivada temos:

$$\begin{aligned}
A'(\theta) &= 100(\cos\theta + \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta) && (1)\\
&= 100(\cos\theta + \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)) && (2)\\
&= 100(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) && (3)\\
&= 100(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) && (4)\\
& && (5)
\end{aligned}$$

E logo a derivada se anula quando: $2\cos\theta - 1 =$ ou seja $\cos\theta = 1/2$ e logo $\theta = \pi/3$. ou quando $\cos\theta + 1 = 0$, ou seja $\cos\theta = -1$ e $\theta = \pi$.

Como $A(0) = 0$, $A(\pi/3) \approx 129.9$ e $A(\pi) = 100$. Temos que a área seccional máxima ocorre quando $\theta = \pi/3$.