Lista 4

Funções de Uma Variável

Derivadas IIII

Derivadas de Ordem Superior

1 — Calcule y' e y'' para as seguintes funções:

a) $y = \operatorname{tgh}(6x)$
b) $y = \operatorname{senh}(7x)$
c) $y = \operatorname{cotgh}(\sqrt{1+x^2})$
d) $y = \cosh(x)^x$
e) $y = \operatorname{arctg}(x^2)$
f) $y = \cos(x)^x$
g) $y = \ln(\cos(x^2))$
h) $y = \log_2(1-3x)$
i) $y = \log_5(3x^3 + \operatorname{sen}(x))$
j) $y = \log_{10}(\dfrac{a-x}{a+x})$
k) $y = \log_a(\dfrac{a-x}{a+x})$
l) $y = \arccos(x^2+3x)$
m) $y = \operatorname{arcsen}(\cos(x))$
n) $y = \cosh(x)\cos(x)$
o) $y = \ln(\cosh(x))$

2 — Encontre:

a) $\dfrac{d^9}{dx^9}x^8\ln(x)$
b) $\dfrac{d^4}{dx^4}\cosh(x)$
c) $\dfrac{d^5}{dx^5}\ln(x)$
d) $\dfrac{d^n}{dx^n}\ln(x)$
e) $\dfrac{d^n}{dx^n}\cosh(2x)$
f) $\dfrac{d^n}{dx^n}\operatorname{senh}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

3 — Encontre y'' se $y = \ln(x^2+y^2)$.

4 — Encontre y' se $y^x = x^y$.

Teorema do Valor Médio

5 — Seja $f(x) = |x-1|$. Mostre que não existe c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3-0)$. Porque isso não contradiz o teorema do valor médio?

6 — Mostre que a equação $2x^3 + 3x^2 + 6x + 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

7 — Mostre que a equação $2x - 1 - \operatorname{sen}(x) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

8 — Mostre que um polinômio de grau 3 tem no máximo três raízes reais.

9 — Use o teorema do valor médio para provar a desigualdade:

$$|\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b)| \leqslant |a-b|$$

10 — Prove as identidades:

a) $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - \dfrac{\pi}{2}$
b) $2\operatorname{arcsen}(x) = \arccos(1-2x^2)$

L'Hopital

11 — Calcule os seguintes limites usando L'Hopital quando possível

a) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{4x^3+x^2+3}{x^5+1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^{100}-x^2+x-1}{x^{12}-3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^5}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \frac{a}{x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to1} \ln(x)\ln(x-1)$

i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^{\operatorname{sen}(x)}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sec^3(x)}{1-\cos(x)}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^x$

m) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3e^{-4x}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to0+} x\ln x$

o) $\displaystyle\lim_{x\to0+} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

Gráficos de Funções

12 — Prove que a função $2x^5+x^3+2x$ é crescente em todos os pontos.

13 — Determine os intervalos nos quais $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ é crescente e nos quais é decrescente.

14 — Determine os intervalos nos quais $f(x)=e^{-}x^2/2$ é crescente e nos quais é decrescente.

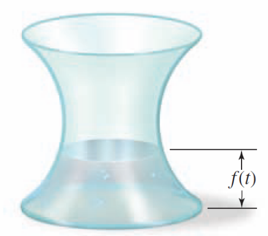
15 — Encontre os valores de c tal que o gráfico de

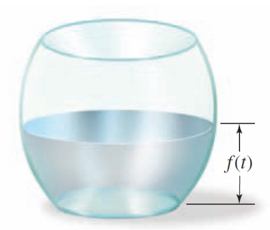
$$f(x)=x^4+2x^3+cx^2+2x+2$$

seja côncavo para cima em todos os pontos.

16 — Mostre que a função $f(x)=x|x|$ tem um ponto de inflexão em $(0,0)$ mas que $f''(0)$ não exista.

17 — Nas figuras a seguir, a água é vertida para o vaso a uma taxa constante (em unidades apropriadas). Esboce o gráfico do nível da água em função do tempo, e explique a sua forma, indicando onde o gráfico é côncavo para cima e côncavo para baixo. Indique os pontos de inflexão no gráfico, e explique a sua significância.

a) 

b) 

18 — Para as próximas funções:

a)Encontre os intervalos para os quais a função é crescente ou decrescente;

b)Encontre os valores de máximo e mínimo locais;

c)Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão;

d)Encontre as assíntotas horizontais e verticais;

e)Esboce o gráfico, utilizando as informações dos itens anteriores

a) $(x^2-1)^3$

b) $3x^{2/3}-x$

c) $(x+2)^{\frac{3}{2}}+1$

d) $x+\cos(x)$

e) $x^{1/3}(x+4)$

f) $\ln(x^4+27)$

g) $\ln(1-\ln(x))$

h) $e^{\frac{-1}{x+1}}$

i) $\ln(\operatorname{tg}^2(x))$

j) $\dfrac{e^x}{x^2-9}$

k) $x \operatorname{tg} x \qquad -\pi/2 < x < \pi/2$

l) $e^{\cos(x)}$

m) $\dfrac{1}{1-\cos(x)}$ $-2\pi < x < 2\pi$

n) $t\sqrt[3]{t^2-4}$

19 — Para as seguintes funções, encontre as assíntotas inclinadas e esboce o gráfico, e para isso:

a) Encontre os intervalos para os quais a função é crescente ou decrescente;

b) Encontre os valores de máximo e mínimo locais;

c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão;

d) Encontre as assíntotas horizontais e verticais e inclinadas;

e) Esboce o gráfico, utilizando as informações dos itens anteriores

a) $\frac{x^2}{x+1}$

b) $\frac{x^2}{(x+1)^2}$

c) $\sqrt{1+x^2}$

d) $\sqrt{10+12x+4x^2}$

Polinômio de Taylor

20 — Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em torno de x_0

a) $\ln(x)$ em torno de 1

b) e^x em torno de 0

c) $\operatorname{sen}(x)$ em torno de 0

d) $\cos(x)$ em torno de 0

e) $\operatorname{senh}(x)$ em torno de 0

f) $\cosh(x)$ em torno de 0

g) $\sqrt[3]{x}$ em torno de 1

h) $\sqrt{x}$ em torno de 4

i) $\dfrac{1}{1-x^2}$ em torno de 0

21 — Usando o polinômio de Taylor de ordem 2 calcule o valor aproximado e avalie o erro:

a) $\ln(1.2)$

b) $\sqrt{3.8}$

c) $\operatorname{sen}(0.1)$

d) $\operatorname{sen}(\pi/25)$

e) $e^{0.003}$

22 — Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 de f em torno de x_0

a) $\ln(x)$ em torno de 1

b) e^x em torno de 0

c) $\operatorname{sen}(x)$ em torno de 0

d) $\cos(x)$ em torno de 0

e) $\operatorname{senh}(x)$ em torno de 0

f) $\cosh(x)$ em torno de 0

g) $\sqrt[x]{x}$ em torno de 1

h) $\sqrt{x}$ em torno de 4

i) $(1+x)^\alpha$ em torno de 0

23 — Quantos termos do polinômio de Taylor são necessários para aproximar e com um erro inferior a 10^{-5}?

24 — Usando polinômios de Taylor calcule $\cos(1)$ com erro em módulo inferior a 10^{-4}

25 — Use o polinômio de Taylor de ordem 4 de $\cos(2x)$ para calcular o exato valor do limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{3x^2}$$

Respostas dos Exercícios

1 **a.)** $y'' = -72\,\mathrm{tgh}(6x)\mathrm{sech}^2(6x)$

c.) $y'' = \dfrac{\left(2x^2\sqrt{x^2+1}\coth\left(\sqrt{x^2+1}\right)-1\right)}{(x^2+1)^{3/2}}\cdot\mathrm{csch}^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

d.) $y'' = \cosh^x(x)(x\,\mathrm{tgh}(x)+\log(\cosh(x)))^2+\cosh^x(x)\left(2\,\mathrm{tgh}(x)+x\mathrm{sech}^2(x)\right)$

g.) $y'' = -2\,\mathrm{tg}\left(x^2\right)-4x^2\sec^2\left(x^2\right)$

2 **a.)** $40320/x$
b.) $\cosh(x)$
c.) $720/x^7$

3 $y'' = -\dfrac{2\left(2y(x)(xy'(x)+1)+x(x-2y'(x))-y(x)^2\right)}{(x^2+y(x)^2-2y(x))^2}$

4 $y' = \dfrac{y(x)\left(x^{y(x)}y(x)-xy(x)^x\ln(y(x))\right)}{x\left(xy(x)^x-x^{y(x)}y(x)\ln(x)\right)}$

6 Seja $f(x) = 2x^3+3x^2+6x+1$. Como $f(0) = 1$ e $f(-1) = -4$ e f contínua pelo Teorema do Valor Intermediário existe c tal que $f(c) = 0$.

Para provar a unicidade. Suponha que existissem mais de uma raiz. Sejam c_1 e c_2 duas raízes. Pelo Teorema de Rolle, existiria d tal que $f'(d) = 0$. Mas $f'(x) = 6x^2+6x+6$ e logo $f'(x) > 0$ para todo x. Absurdo

10 Dica derive a identidade.

11 **a.)** 2 **b.)** 0 **c.)** ∞ **d.)** ∞
f.) 5 **g.)** a **i.)** 1 **j.)** 1
n.)

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x} =$$

Utilizando L'Hopital temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x} &= \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{-x^2}{x}\\ &= \lim_{x\to 0+} -x = 0\end{aligned}$$

o.) Dica:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{x^2}{\mathrm{sen}\,x}\right)$$

e

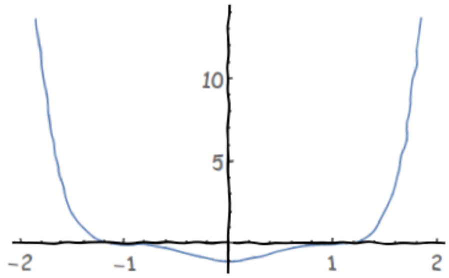
$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{\mathrm{sen}\,x} = 0$$

13 Crescente se $0 < x < e$

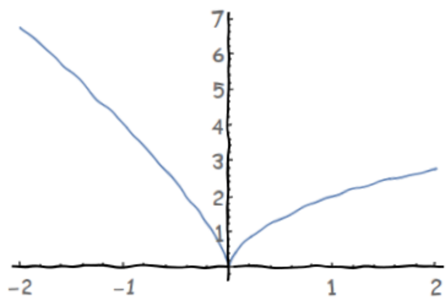
14 Crescente se $x < 0$

15 $c > \frac{3}{2}$

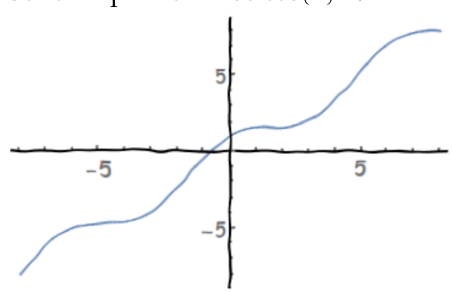
18 **a.)** Crescente se $0 < x < 1$ ou $x > 1$
Derivadas iguais a zero $x = -1$ ou $x = 0$ ou $x = 1$.
Concava para cima se $x < -1$ ou $-\frac{1}{\sqrt{5}} < x < \frac{1}{\sqrt{5}}$ ou $x > 1$



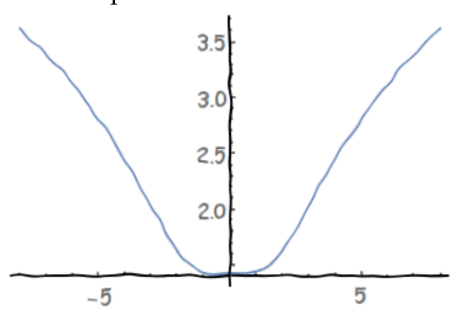
b.) Crescente se $0 < x < 8$.
Derivadas iguais a zero $x = 8$
Derivada não existe $x = 0$
Concavidade para baixo $x < 0$ ou $x > 0$.



d.)
Pontos Críticos $\frac{\pi}{2}+2\pi k$
Crescente Exceto nos pontos críticos.
Concava para cima se $\cos(x) < 0$.

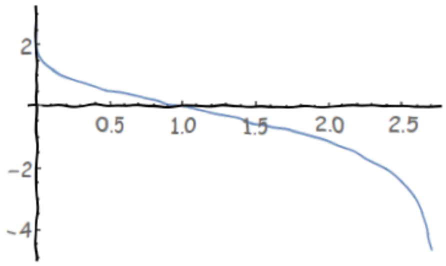


f.) Crescente se $x > 0$
Concava para cima se $-3 < x < 0$ ou $0 < x < 3$

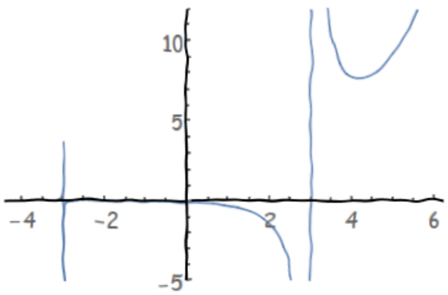


g.)
Domínio $0 < x < e$

Crescente nunca
Concava para cima se $0 < x < 1$



j.)
Domínio $x \neq \pm 3$
Primeira derivada $\frac{e^x(x^2-2x-9)}{(x^2-9)^2}$
Crescente
$x < -3$ ou $-3 < x < 1-\sqrt{10}$ ou $x > 1+\sqrt{10}$
2ł Derivada muito complicada para ser analisada.



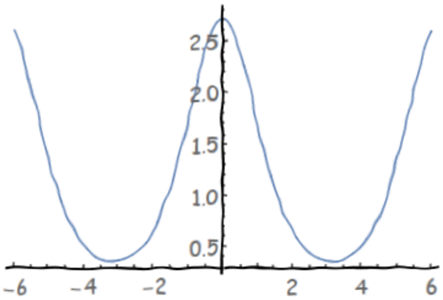
l.)
Primeira derivada $\operatorname{sen}(x)\left(-e^{\cos(x)}\right)$
Crescente se $-\operatorname{sen}(x) > 0$
Ou seja se $2\pi k - \pi < x < 2\pi k$.
Segunda derivada: $e^{\cos(x)}\left(\operatorname{sen}^2(x) - \cos(x)\right)$
$= e^{\cos(x)}\left(1 - \cos^2(x) - \cos(x)\right)$
Crescente se

$$2\pi k + \arccos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right) < x <$$

$$< 2\pi k + 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right)$$

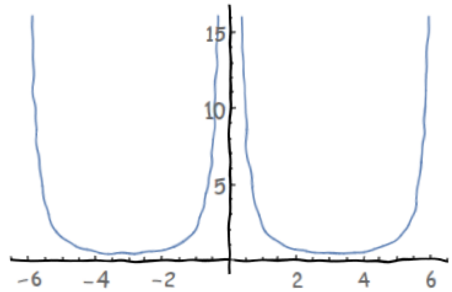
É útil a aproximação:

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right) \approx 0.90455$$

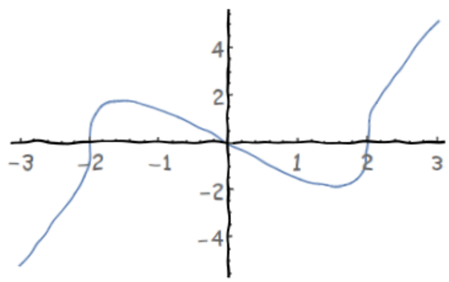


m.) Crescente se $-\pi < x < 0$ ou $\pi < x < 2\pi$.
Pontos Críticos $x = -\pi$ ou $x = \pi$
Concava para baixo: nunca

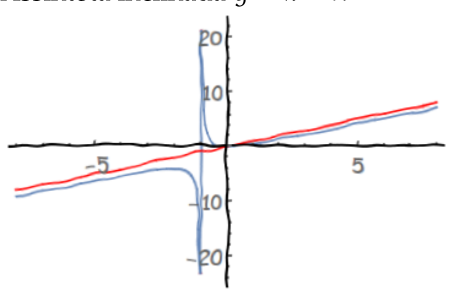
Assíntotas verticais na origem. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\cos(x)} = \infty$



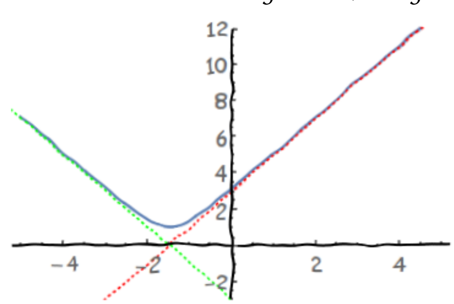
n.)
Derivada $f' = \frac{5t^2-12}{3(t^2-4)^{2/3}}$.
Derivada não existe $t = 2, t = -2$.
Decrescente se $-2\sqrt{\frac{3}{5}} < t < 2\sqrt{\frac{3}{5}}$.
Derivada se anula $t = -2\sqrt{\frac{3}{5}}$ ou $t = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$
Segunda derivada $f'' = \frac{2t(5t^2-36)}{9(t^2-4)^{5/3}}$.
Concava para cima se $-\frac{6}{\sqrt{5}} < t < -2$ ou $t > \frac{6}{\sqrt{5}}$



19 a.)
$f'' = 2/(1+x)^3$
Assíntota inclinada $y = x - 1$.



d.) Crescente se $x > -\frac{3}{2}$
$f'' = \frac{\sqrt{2}}{(2x^2+6x+5)^{3/2}}$.
Assíntotas inclinadas $y = 2x + 3$ e $y = -2x + 3$



20 **a.)** $(x-1) - 1/2(x-1)^2$
b.) $1 + x + x^2/2$
d.) $1 - \frac{x^2}{2}$
g.) $1 + 1/3(-1+x) - 1/9(-1+x)^2$

21 **a.)** Usando o polinômio calculado no exercício anterior temos: 0.18.
e.) Usando o polinômio calculado no exercício anterior temos: 1.003

22 **a.)** $\frac{1}{5}(x-1)^5 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1)$
c.) $x - x^3/6 + x^5/120$
f.) $1 + x^2/2 + x^4/24$

23 Usando a fórmula de Taylor com erro de Lagrange:

Suponhamos que a função $f(x)$ seja $(n+1)$ vezes diferenciável no ao redor do ponto p. Então

$$E_n(x) = \frac{f^{n+1}(\overline{x})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para algum $\overline{x}$ entre x e p.

Queremos que $E_n(1) < 10^{-5}$. Logo basta tomar n tal que $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$, (pois $e < 3$) ou seja, tal que $(n+1)! > 3(10^5)$. Substituindo valores em $(n+1)!$ temos que $n = 8$.

24 Use a fórmula de Taylor com erro de Lagrange, observando que $1 < \operatorname{sen} \overline{x} < 1$ e $1 < \cos \overline{x} < 1$.