Lista 2: Regra da Cadeia, Derivação Implícita e Taxas de Variação

Funções de Uma Variável

1 — Calcule as seguintes derivadas

a) $\operatorname{tg}(4x)$
b) $\operatorname{sen}(x^3 + 3x)$
c) $e^{\cos x}$
d) $e^{\operatorname{sen} x^3}$
e) $\dfrac{1}{1 + e^{x^3}}$
f) $\log_2(\operatorname{sen} 2x)$

2 — Prove que

a) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cossec}(x)) = -\operatorname{cossec}(x)\operatorname{cotg}(x)$
b) $\dfrac{d}{dx}(\sec(x)) = \sec(x)\operatorname{tg}(x)$
c) $\dfrac{d}{dx}\arccos(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
d) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arccossec}(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

3 — Mostre $\dfrac{d}{dx}a^x = \ln(a)a^x$. (Use que $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$).

4 — Encontre dy/dx diferenciando implicitamente

a) $x^2y + xy^2 = 3x$
b) $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$
c) $x\operatorname{sen}(y) + \cos(2y) = \cos(y)$
d) $x^y = y^x$

5 — Mostre, fazendo a diferenciação implícita, que a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

6 — Mostre que a soma dos interseptos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c.

7 — Encontre uma equação da reta tangente à curva $y^2 = x^3(2-x)$ no ponto $(1,1)$

8 — Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}}\operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua no 0 mas não diferenciável no 0

9 — Calcule a derivada das seguintes funções

a) x^x
b) $x^{\cos x}$
c) $(\operatorname{sen} x)^{\cos x}$
d) $x^n + n^x + x^x + n^n$ sendo $n > 5$ um número real fixado.

Aplicações da Derivada

10 — O deslocamento de uma partícula sobre uma corda vibrante é dado pela equação

$$y(t) = 10 + \frac{1}{4}\,\text{sen}(10\pi t)$$

a) Encontre a velocidade da partícula após t segundos

b) Em quais instantes de tempo a partícula está parada?

11 — O movimento de uma mola sujeita a uma força de atrito é frequentemente modelado pelo produto de uma função exponencial e uma função seno. Suponha que a equação do movimento de um ponto sobre essa mola é

$$s(t) = 2e^{-\frac{t}{2}}\,\text{sen}(t)$$

onde s é medida em centímetros e t em segundos.

a) Encontre a velocidade após t segundos.

b) Encontre os instantes de tempo nos quais a partícula se encontra em repouso e a respectiva posição nesses instantes.

c) Mostre que $\lim_{t\to\infty} s(t) = 0$. Interprete o significado desse limite.

12 — Uma escada com 10m de comprimento está apoiada numa parede vertical. Seja θ o ângulo entre o topo da escada e a parede e x a distância da base da escada até a parede. Se a base da escada escorregar para longe da parede, com que rapidez x variará em relação a θ quando $\theta = \pi/3$?

13 — Cristais de clorato de sódio são fáceis de crescer no formato de cubos permitindo uma solução de água e clorato de sódio evaporar vagarosamente. Se V for o volume de cada cubo com comprimento de lado x:

a) Calcule $\dfrac{dV}{dx}$ quando $x = 3mm$ e explique seu significado.

b) Mostre que a taxa de variação do volume de cada cubo em relação ao comprimento da aresta é igual a metade da área da superfície do cubo.

14 — Uma pedra caiu dentro de um lago, produzindo uma ondulação circular que cresce a uma velocidade radial de $60m/s$. Encontre a taxa segundo conforme a qual a área dentro do círculo está crescendo depois de a) $1s$ b) $3s$ c) $5s$. O que você pode concluir?

15 — A lei de Boyle estabelece que quando uma amostra de gás é comprimida a uma temperatura constante, o produto da pressão e do volume permanece constante: $PV = C$

a) Encontre a taxa de variação do volume em relação a pressão.

b) Uma amostra de gás está em um recipiente a baixa pressão e é regularmente comprimida a temperatura constante por $10min$. O volume decresce mais rapidamente no início ou final dos 10 minutos. Explique.

16 — Em uma fazenda de piscicultura, uma população de peixes é colocada dentro de um lago e colhida regularmente. Um modelo para a variação da população é dada pela equação:

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

onde r_0 é a taxa de nascimento dos peixes, P_c é a população máxima que o pequeno lago pode manter (*capacidade de suporte*) e β é a percentagem da população que é colhida.

a) Qual o valor de $\dfrac{dP}{dt}$ corresponde à população estável?

b) Se o pequeno lago pode manter 10000 peixes a taxa de nascimento é 5% e a taxa de colheita é de 4% encontre o nível estável da população.

c) O que acontece se β é elevado a 5%?

Respostas dos Exercícios

3 Se $y = a^x$ então $\ln(y) = x \ln a$ e logo $y = e^{x \ln a}$. Use a regra da Cadeia e conclua.

10 **a.)** Derivando: $y' = 5\pi \cos(10\pi t)$ **b.)** Igualando a zero e resolvendo: $\pm\frac{1}{20} + \frac{k}{5}$, com $k \in \mathbb{Z}$

11 **a.)** $2e^{-\frac{t}{2}}\cos(t) - e^{-\frac{t}{2}}\operatorname{sen}(t)$ **b.)** $-\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + k\pi$ e $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + k\pi$

12 5m/rad

15 a) $\dfrac{dV}{dP} = -\dfrac{V}{P}$ b) No início.