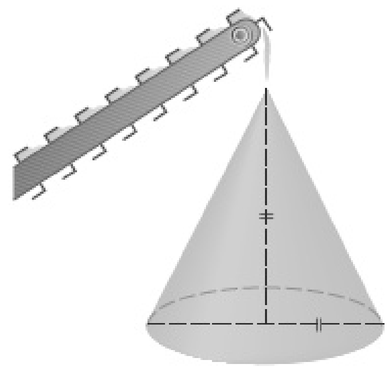
Lista 3: Taxas Relacionadas, Derivadas de Ordem superior, Máximos e mínimos

Funções de Uma Variável



1 — Se uma bola de neve derrete de tal forma que sua área de superfície decresce a uma taxa de $1\text{cm}^2/\text{min}$, encontre a taxa segundo a qual o diâmetro decresce quando o diâmetro é 10cm.

2 — Dois carros iniciam o movimento no mesmo ponto. Um viaja para o sul a $60\text{km}/\text{h}$ e o outro para oeste a $25\text{km}/\text{h}$. A que taxa está crescendo a distância entre os carros duas horas depois?

3 — A água está vazando de um tanque cônico invertido a uma taxa de $10.000\text{cm}^3/\text{min}$. Ao mesmo tempo está sendo bombeada água para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem 6m de altura e o diâmetro no topo é 4m. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de $20\text{cm}/\text{min}$ quando a altura da água for 2m, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada dentro do tanque.

4 — Uma esteira transportadora está descarregando cascalho a uma taxa de $30\text{m}^3/\text{min}$ formando uma pilha na forma de cone com diâmetro da base e da altura sempre iguais. Quão rápido está crescendo a altura da pilha, quando sua altura é de 10m.

5 — O café sai de uma máquina de café expresso a uma taxa uniforme de $10\text{cm}^3/\text{s}$ e é coletado em uma xícara em forma de cone truncado (ver figura abaixo). Se os raios superior e inferior da xícara forem de 4 e 2cm e a altura for de 6cm, com que rapidez estará subindo o nível de café quando ele estiver na metade da xícara?

6 — Encontre:

a) $\dfrac{d^9}{dx^9} x^8 \ln(x)$

b) $\dfrac{d^n}{dx^n} \ln(x)$

c) $\dfrac{d^n}{dx^n} \cosh(2x)$

7 — Encontre y'' se $y = \ln(x^2 + y^2)$.

Diferenciais e Aproximações Diferenciais

8 — Ache a linearização de $f(x) = \sqrt{x+3}$ em $a = 1$ e use essa expressão para aproximar $\sqrt{3.9}$ e $\sqrt{4.1}$.

9 — Ache a linearização de $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ em $a = 0$ e use essa expressão para aproximar $\sqrt{0.95}$ e $\sqrt{1.05}$.

10 — O lado de um cubo é medido com um erro máximo possível de 2%. Use diferenciais para estimar o percentagem de erro máxima no volume computado.

11 — O período de um pêndulo simples é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

sendo L o comprimento do pêndulo, g a aceleração de gravidade e T é medido em segundos. Suponha que o comprimento do pêndulo é medido com um erro máximo de 0.5%. Qual a percentagem de erro máximo no período?

Máximos e Mínimos

12 — Suponha que f seja uma função contínua no intervalo $[a, b]$

a) f possui máximos e mínimos globais nesse intervalo? Justifique?
b) Como podemos encontrar esses pontos?

13 — Encontre os pontos críticos da função:

a) $f(x) = 5x^2 + 4$
b) $f(\theta) = \theta + \text{sen}(\theta)$
c) $f(x) = |2x + 3|$
d) $f(x) = xe^{2x}$
e) $f(x) = x\ln(x)$
f) $f(t) = \sqrt{t}(1-t)$
g) $g(t) = 5t^{2/3} + t^{5/3}$

14 — Encontre os valores máximos e mínimos **globais** de f no intervalo dado:

a) $f(x) = \frac{x^4-4}{x^2+1}$ no intervalo $[-4, 4]$
b) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ no intervalo $[-1, 2]$
c) xe^{-x} no intervalo $[0, 2]$
d) $\frac{\ln(x)}{x}$ no intervalo $[1, 3]$
e) $f(t) = \text{sen}(t) + \cos(t)$ no intervalo $[0, \pi/3]$
f) $f(x) = x - 3\ln(x)$ no intervalo $[1, 4]$

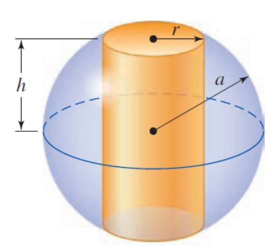
15 — Encontre o ponto da hipérbole $y^2 - x^2 = 4$ que está mais próximo do ponto $(2, 0)$.

16 — Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

17 — Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito num cone reto com 20cm de altura e 12 cm de raio.

18 — Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito num cone reto com 20cm de altura e 12 cm de raio.

19 — Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre o cilindro de maior volume possível.



Respostas dos Exercícios

1 Escreva o área em função do diâmetro. Derive implicitamente em função do tempo. Use que $dA/dt = 1$ e $d = 10$.
$d' = 1/(20\pi)$

2 Escreva as posições dos carros em função do tempo. Calcule a distância em função do tempo.
Taxa=$65km/h$

5 $\frac{10}{9\pi}$ cm/s

7 $y'' = -\frac{2\left(2y(x)(xy'(x)+1)+x(x-2y'(x))-y(x)^2\right)}{\left(x^2+y(x)^2-2y(x)\right)^2}$

8 Linearização $\frac{x+7}{4}$
em $x = 0,9$ $\sqrt{3.9} \approx 1.975$

9 Aproximação linear $1 - x/3$.
Para $x = 0,05$ então $\sqrt[3]{1-0,05} \approx 0,983333$

12 **a.)** Leia o Teorema de Weierstrass. **b.)** Leia o Teorema de Fermat.

13 **a.)** 0 **b.)** $\pm\pi r + 2\pi k$ **c.)** $-\frac{3}{2}$ **d.)** $-\frac{1}{2}$

14 **a.)** Ponto de máximo $x = -4$, valor máximo 252/17. Ponto de Mínimo $x = 0$, valor mínimo -4.
b.) Ponto de máximo $x = 2$ e ponto de mínimo $x = -1$.
d.) Ponto de máximo $x = e$ e ponto de mínimo $x = 1$

15 Como $\sqrt{x}$ é monótona crescente. Minimizar a distância

$$d = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

é equivalente a minimizar

$$d^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$$

Mínimo em $x = 1$.

19 O volume do cilindro é dado por

$$V = \pi r^2 h$$

e por Pitágoras temos a seguinte relação entre o raio e a altura:

$$r^2 + (h/2)^2 = R^2$$

Logo a expressão do volume em função da altura é

$$V(h) = \pi h(R^2 - (h/2)^2) = -((h^3\pi)/4) + h\pi R^2$$

Como o cilindro está contido na esfera, temos que os valores de h estão no intervalo $[0, R]$. Assim, temos um problema de extremos em um intervalo fechado, e consequentemente temos a existência de um máximo. Esse máximo ocorrerá ou nos pontos extremos do intervalo ou nos pontos críticos.

Como $V(h)$ é diferenciável, os pontos críticos são os pontos de derivada iguais a 0. Derivando

$$V'(h) = -((h^2\pi)/2) + \pi(-(h^2/4) + R^2)$$

Resolvendo $V'(h) = 0$ temos:

$$h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

Como

$$r^2 + (h/2)^2 = R^2$$

temos que

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$$

e assim

$$\frac{h}{r} = \sqrt{2}$$