Lista 4
Funções de Uma Variável

Teorema do Valor Médio, Regra de L'Hôpital, Máximos e Mínimos em intervalos abertos, Como as derivadas afetam a forma do gráfico. Crescimento, decrescimento e concavidade.

Teorema do Valor Médio

1 — Seja $f(x) = |x-1|$. Mostre que não existe c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3-0)$. Porque isso não contradiz o teorema do valor médio?

2 — Mostre que a equação $2x^3 + 3x^2 + 6x + 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

3 — Mostre que um polinômio de grau 3 tem no máximo três raízes reais.

4 — Use o teorema do valor médio para provar a desigualdade:

$$|\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b)| \leqslant |a-b|$$

5 — Prove as identidades:

a) $\arcsin\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - \dfrac{\pi}{2}$

b) $2\arcsin(x) = \arccos(1-2x^2)$

L'Hopital

6 — Calcule os seguintes limites usando L'Hopital quando possível

a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{4x^3+x^2+3}{x^5+1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-x^2+x-1}{x^{12}-3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^5}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^n}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x \operatorname{sen}\frac{a}{x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \ln(x)\ln(x-1)$

i) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^{1/x}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sec^3(x)}{1-\cos(x)}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^x$

m) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^3 e^{-4x}$

n) $\lim_{x\to 0+} x \ln x$

o) $\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

Como a derivada afeta o gráfico

7 — Prove que a função $2x^5 + x^3 + 2x$ é crescente em todos os pontos.

8 — Determine os intervalos nos quais $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ é crescente e nos quais é decrescente.

9 — Determine os intervalos nos quais $f(x) = e^{-x^2/2}$ é crescente e nos quais é decrescente.

10 — Encontre os valores máximos e mínimos **globais** de f (se existirem) no intervalo dado:

a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ no intervalo $(0, \infty)$

b) $g(x) = \sqrt{9 + x^2}$ no intervalo $(-\infty, \infty)$

c) $h(x) = x^5 - 7x^2 + 2$ no intervalo $(-\infty, \infty)$

d) $k(x) = \ln(x) - x$ no intervalo $(0, \infty)$

e) $m(x) = 1/(x - x^2)$ no intervalo $(0, 1)$

11 — Encontre os valores de c tal que o gráfico de

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + cx^2 + 2x + 2$$

seja côncavo para cima em todos os pontos.

12 — Mostre que a função $f(x) = x\,|x|$ tem um ponto de inflexão em $(0, 0)$ mas que $f''(0)$ não exista.

Respostas dos Exercícios

2 Seja $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$. Como $f(0) = 1$ e $f(-1) = -4$ e f contínua pelo Teorema do Valor Intermediário existe c tal que $f(c) = 0$.

Para provar a unicidade. Suponha que existissem mais de uma raiz. Sejam c_1 e c_2 duas raízes. Pelo Teorema de Rolle, existiria d tal que $f'(d) = 0$. Mas $f'(x) = 6x^2 + 6x + 6$ e logo $f'(x) > 0$ para todo x. Absurdo

5 Dica derive a identidade.

6 **a.)** 2 **b.)** 0 **c.)** ∞ **d.)** ∞
f.) 5 **g.)** a **i.)** 1 **j.)** 1
n.)

$$\lim_{x\to 0+} x \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} =$$

Utilizando L'Hopital temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} &= \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{-x^2}{x} \\ &= \lim_{x\to 0+} -x = 0\end{aligned}$$

o.) Dica:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{x^2}{\operatorname{sen} x}\right)$$

e

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x} = 0$$

8 Crescente se $0 < x < e$

9 Crescente se $x < 0$

10 **a.)** Não tem máximo. Não tem mínimo

b.) Mínimo $x = 3$ Não tem máximo.

d.) Máximo $x = 1$. Valor máximo -1 Não tem mínimo

11 $c > \frac{3}{2}$