Lista 5

Funções de Uma Variável

Esboço de Gráficos e Problemas de Otimização

1 — Para as próximas funções:

a) Encontre os intervalos para os quais a função é crescente ou decrescente;

b) Encontre os valores de máximo e mínimo locais;

c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão;

d) Encontre as assíntotas horizontais e verticais;

e) Esboce o gráfico, utilizando as informações dos itens anteriores

a) $(x^2-1)^3$

b) $3x^{2/3}-x$

c) $(x+2)^{\frac{3}{2}}+1$

d) $x+\cos(x)$

e) $x^{1/3}(x+4)$

f) $\ln(x^4+27)$

g) $\ln(1-\ln(x))$

h) $e^{\frac{-1}{x+1}}$

i) $\ln(\text{tg}^2(x)$

j) $\dfrac{e^x}{x^2-9}$

k) $x\,\text{tg}\,x \qquad -\pi/2 < x < \pi/2$

l) $e^{\cos(x)}$

m) $\dfrac{1}{1-\cos(x)} \quad -2\pi < x < 2\pi$

n) $t\sqrt[3]{t^2-4}$

2 — Para as seguintes funções, encontre as assíntotas inclinadas e esboce o gráfico, e para isso:

a) Encontre os intervalos para os quais a função é crescente ou decrescente;

b) Encontre os valores de máximo e mínimo locais;

c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão;

d) Encontre as assíntotas horizontais e verticais e inclinadas;

e) Esboce o gráfico, utilizando as informações dos itens anteriores

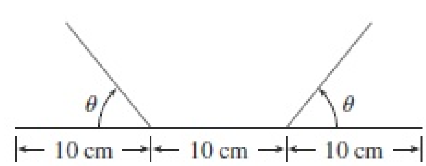
a) $\frac{x^2}{x+1}$

b) $\frac{x^2}{(x+1)^2}$

c) $\sqrt{1+x^2}$

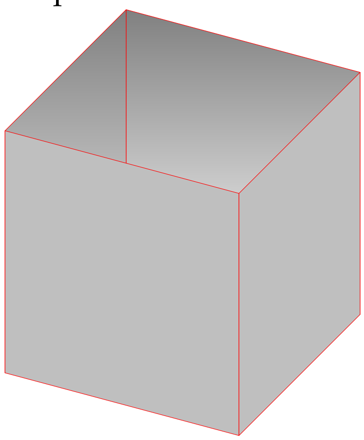
d) $\sqrt{10+12x+4x^2}$

3 — Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30cm dobrando-se para cima $1/3$ da folha de cada lado, fazendo-se um ângulo θ com a horizontal. Como deve ser escolhido θ de forma que a capacidade de carregar a água na calha seja máxima?



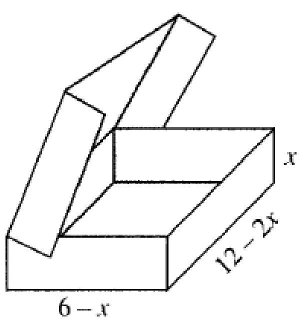
4 — Uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um quadrado de 60cm de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa pode ter. Justifique detalhadamente porque o máximo existe.

5 — Uma caixa retangular com uma base quadrada e sem tampa e de volume de 216 cm^3 deve ser construída. Quais devem ser as dimensões da caixa para minimizar a área superficial da caixa? Qual é a área superficial mínima?

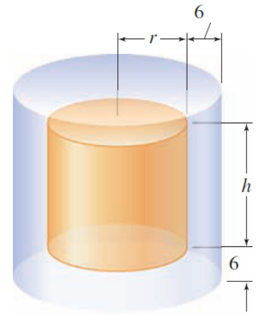


6 — Uma lata cilíndrica sem topo é feita para receber $V cm^3$ de líquido. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para fazer a lata.

7 — Uma caixa com tampa conforme a figura abaixo é feita a partir de uma folha de papel de 12cmx12cm. Encontre a caixa que optimiza o volume.

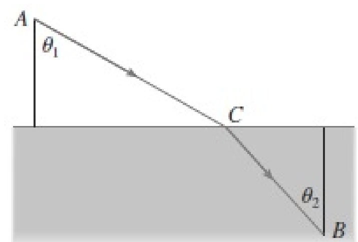


8 — Um recipiente cilíndrico para armazenar resíduos radioativos deve ser construído a partir de chumbo e têm um espessura de 6 cm. (veja a figura). Se o volume do cilindro externo é de $16\pi m^3$, encontre o raio e a altura do cilindro interno que vai resultar em um recipiente de máxima capacidade de armazenamento.

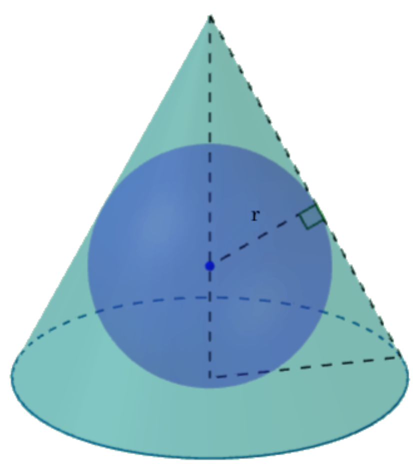


9 — Seja v_1 a velocidade da luz no ar e v_2 a velocidade da luz na água. De acordo com o principio de Fermat um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

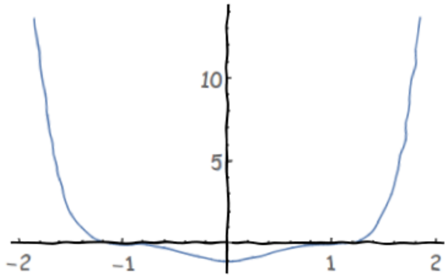


10 — Uma esfera de raio r está inscrita em um cone circular reto Encontre o volume mínimo do cone. Justifique detalhadamente porque existe o cone de volume mínimo.

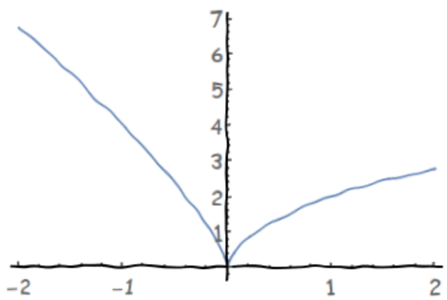


Respostas dos Exercícios

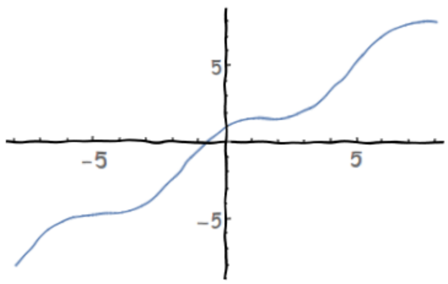
1 **a.)** Crescente se $0 < x < 1$ ou $x > 1$
Derivadas iguais a zero $x = -1$ ou $x = 0$ ou $x = 1$.
Concava para cima se $x < -1$ ou $-\frac{1}{\sqrt{5}} < x < \frac{1}{\sqrt{5}}$ ou $x > 1$



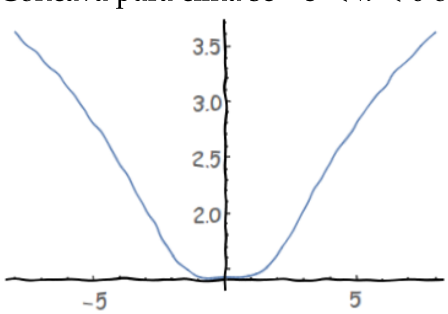
b.) Crescente se $0 < x < 8$.
Derivadas iguais a zero $x = 8$
Derivada não existe $x = 0$
Concavidade para baixo $x < 0$ ou $x > 0$.



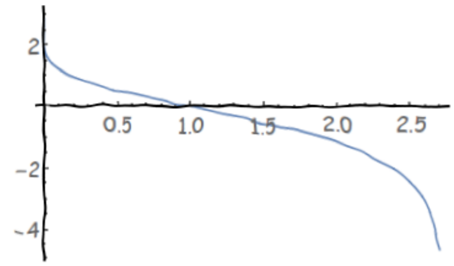
d.)
Pontos Críticos $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$
Crescente Exceto nos pontos críticos.
Concava para cima se $\cos(x) < 0$.



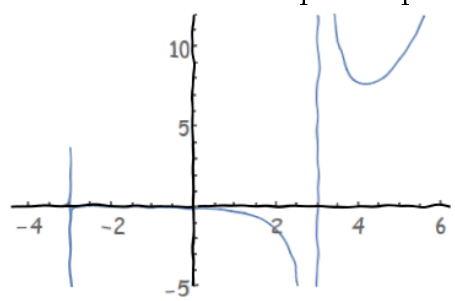
f.) Crescente se $x > 0$
Concava para cima se $-3 < x < 0$ ou $0 < x < 3$



g.)
Domínio $0 < x < e$
Crescente nunca
Concava para cima se $0 < x < 1$



j.)
Domínio $x \neq \pm 3$
Primeira derivada $\frac{e^x(x^2-2x-9)}{(x^2-9)^2}$
Crescente
$x < -3$ ou $-3 < x < 1 - \sqrt{10}$ ou $x > 1 + \sqrt{10}$
2ª Derivada muito complicada para ser analisada.

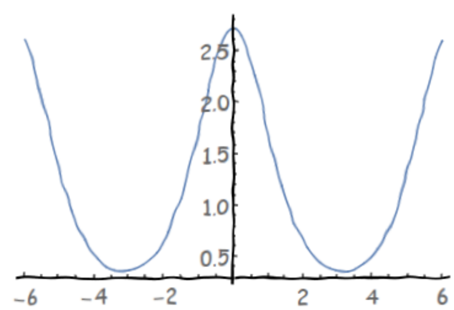


l.)
Primeira derivada $\operatorname{sen}(x)\left(-e^{\cos(x)}\right)$
Crescente se $-\operatorname{sen}(x) > 0$
Ou seja se $2\pi k - \pi < x < 2\pi k$.
Segunda derivada: $e^{\cos(x)}\left(\operatorname{sen}^2(x) - \cos(x)\right)$
$= e^{\cos(x)}\left(1 - \cos^2(x) - \cos(x)\right)$
Crescente se

$$2\pi k + \arccos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right) < x <$$
$$< 2\pi k + 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right)$$

É útil a aproximação:

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right) \approx 0.90455$$

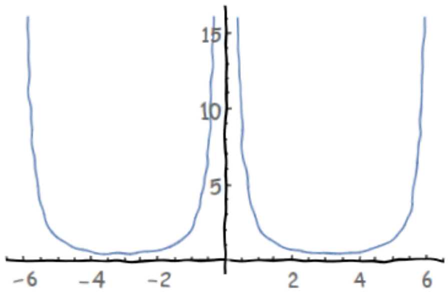


m.) Crescente se $-\pi < x < 0$ ou $\pi < x < 2\pi$.

Pontos Críticos $x = -\pi$ ou $x = \pi$

Concava para baixo: nunca

Assíntotas verticais na origem. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos(x)} = \infty$



n.)

Derivada $f' = \frac{5t^2-12}{3(t^2-4)^{2/3}}$.

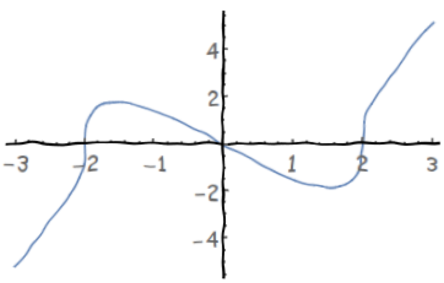
Derivada não existe $t = 2, t = -2$.

Decrescente se $-2\sqrt{\frac{3}{5}} < t < 2\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Derivada se anula $t = -2\sqrt{\frac{3}{5}}$ ou $t = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$

Segunda derivada $f'' = \frac{2t(5t^2-36)}{9(t^2-4)^{5/3}}$.

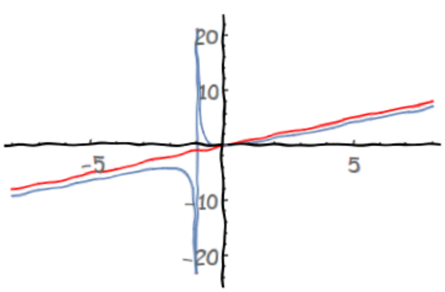
Concava para cima se $-\frac{6}{\sqrt{5}} < t < -2$ ou $t > \frac{6}{\sqrt{5}}$



2 **a.)**

$f'' = 2/(1+x)^3$

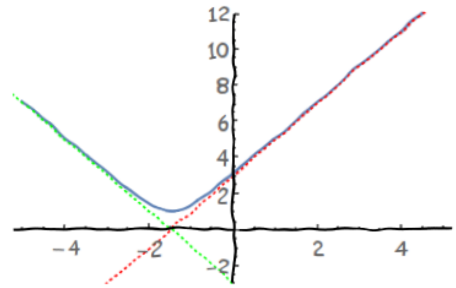
Assíntota inclinada $y = x - 1$.



d.) Crescente se $x > -\frac{3}{2}$

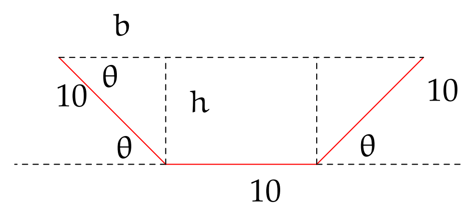
$f'' = \frac{\sqrt{2}}{(2x^2+6x+5)^{3/2}}$.

Assíntotas inclinadas $y = 2x + 3$ e $y = -2x + 3$



3 Neste caso, queremos maximizar o volume que uma calha pode suportar. Primeiramente observamos que o volume de uma calha desta forma é a área de seção transversal vezes comprimento da calha. Assim, para um determinado comprimento, a fim de maximizar o volume devemos maximizar a área da seção transversal.

Para obter uma fórmula para a área da seção transversal vamos refazer o desenho acima um pouco.



A área seccional pode ser obtida somando a área do retângulo e as áreas dos triângulos. Como $b = 10\cos\theta$ e $h = 10\,\mathrm{sen}\,\theta$ temos:

$$A = 10h + 2\left(\frac{1}{2}bh\right) = 100\,\mathrm{sen}\,\theta + (10\,\mathrm{sen}\,\theta)(10\cos\theta)$$

$$A = 100(\mathrm{sen}\, + \theta\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)$$

Podemos assumir que θ pertence ao intervalo $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

Calculando a derivada temos:

$$\begin{aligned} A'(\theta) &= 100(\cos\theta + \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta) && (1)\\ &= 100(\cos\theta + \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)) && (2)\\ &= 100(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) && (3)\\ &= 100(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) && (4)\\ & && (5) \end{aligned}$$

E logo a derivada se anula quando: $2\cos\theta - 1 =$ ou seja $\cos\theta = 1/2$ e logo $\theta = \pi/3$. ou quando $\cos\theta + 1 = 0$, ou seja $\cos\theta = -1$ e $\theta = \pi$.

Como $A(0) = 0$, $A(\pi/3) \approx 129.9$ e $A(\pi) = 100$. Temos que a área seccional máxima ocorre quando $\theta = \pi/3$.

5

$$S(x) = \frac{864}{x} + x^2.$$

O mínimo existe pois $x \to 0^+, S(x) \to \infty$ e $x \to \infty, S(x) \to \infty$.

O mínimo ocorre em $x = 6\sqrt[3]{2}$.

10

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi r^2 h^2}{3(h-2r)}$$

O mínimo ocorre quando $h = 4r$