Lista 6

Funções de Uma Variável

Polinômios de Taylor e Antiderivadas

Polinômio de Taylor

1 — Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em torno de x_0 e usando um software desenhe os gráficos da função e do polinômio de Taylor numa vizinhança do ponto especificado.

a) $\ln(x)$ em torno de 1
b) e^x em torno de 0
c) $\operatorname{sen}(x)$ em torno de 0
d) $\cos(x)$ em torno de 0
e) $\operatorname{senh}(x)$ em torno de 0
f) $\cosh(x)$ em torno de 0
g) $\sqrt[3]{x}$ em torno de 1
h) $\sqrt{x}$ em torno de 4
i) $\dfrac{1}{1-x^2}$ em torno de 0

2 — Usando o polinômio de Taylor de ordem 2 calcule o valor aproximado e avalie o erro:

a) $\ln(1.2)$
b) $\sqrt{3.8}$
c) $\operatorname{sen}(0.1)$
d) $\operatorname{sen}(\pi/25)$
e) $e^{0.003}$

3 — Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 de f em torno de x_0

a) $\ln(x)$ em torno de 1
b) e^x em torno de 0
c) $\operatorname{sen}(x)$ em torno de 0
d) $\cos(x)$ em torno de 0
e) $\operatorname{senh}(x)$ em torno de 0
f) $\cosh(x)$ em torno de 0
g) $\sqrt[x]{x}$ em torno de 1
h) $\sqrt{x}$ em torno de 4
i) $(1+x)^\alpha$ em torno de 0

4 — Quantos termos do polinômio de Taylor são necessários para aproximar e com um erro inferior a 10^{-5}?

5 — Usando polinômios de Taylor calcule $\cos(1)$ com erro em módulo inferior a 10^{-4}

6 — Use o polinômio de Taylor de ordem 4 de $\cos(2x)$ para calcular o exato valor do limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{3x^2}$$

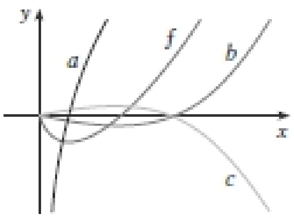
7 — Use o polinômio de Taylor de $\operatorname{senh} x^4$ para calcular o exato valor do limite

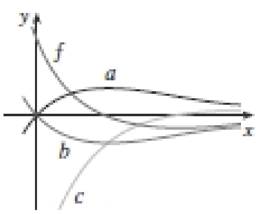
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x^4 - x^4}{(x-\operatorname{sen} x)^4}$$

8 — Use o polinômio de Taylor para calcular o exato valor do limite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(\cos(x))}+\frac{2}{\operatorname{sen}^2(x)}\right)$$

9 — O gráfico da função f é apresentado abaixo. Identifique o gráfico da antiderivada de f.

a) 

b) 

10 — Calcule as seguintes antiderivadas:

a) $\int x\,dx$

b) $\int (3x+1)\,dx$

c) $\int x^n\,dx$

d) $\int \left(x^2+x+1\right)\,dx$

e) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

f) $\int \left(x+\frac{1}{x^3}\right)\,dx$

g) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

h) $\int \left(3\sqrt[7]{x^2}+\cos(x)\right)\,dx$

i) $\int e^{4x}\,dx$

j) $\int \cos(3x)\,dx$

k) $\int \left(x+3e^{5x}+\cos(2x)\right)\,dx$

l) $\int \left(1-\cos(4x)+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{7}\right)\right)\,dx$

m) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

n) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$

o) $\int 3^x\,dx$

p) $\int \sec^2(2x)\,dx$

q) $\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx$

11 — Uma partícula se desloca sobre o eixo x com uma função posição $x = x(t)$. Determine $x = x(t)$ sabendo que:

a) $\frac{dx}{dt} = 2t-1$ e $x(0)=2$

b) $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ e $x(0)=0$

c) $\frac{d^2x}{dt^2} = 3$ e $v(0)=1$ e $x(0)=1$

d) $\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-t}$ e $v(0)=0$ e $x(0)=1$

e) $\frac{d^2x}{dt^2} = \cos(3t)$ e $v(0)=1$ e $x(0)=0$

12 — Uma vez que pingos de chuva crescem à medida que caem, sua área superficial cresce e, portanto, a resistência à sua queda aumenta. Um pingo de chuva tem uma velocidade inicial para baixo de 10 m/s e sua aceleração para baixo é

$$a(t)=\begin{cases}9-0.9t & \text{se } 0\leqslant t\leqslant 10\\ 0 & \text{se } t>10\end{cases}$$

Se o pingo de chuva estiver inicialmente a 500 m acima do solo, quanto tempo ele levará para cair?

Respostas dos Exercícios

1 **a.)** $(x-1)-1/2(x-1)^2$
b.) $1+x+x^2/2$
d.) $1-\frac{x^2}{2}$
g.) $1+1/3(-1+x)-1/9(-1+x)^2$

2 **a.)** Usando o polinômio calculado no exercício anterior temos: 0.18.
e.) Usando o polinômio calculado no exercício anterior temos: 1.003

3 **a.)** $\frac{1}{5}(x-1)^5-\frac{1}{4}(x-1)^4+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{2}(x-1)^2+(x-1)$
c.) $x-x^3/6+x^5/120$
f.) $1+x^2/2+x^4/24$

4 Usando a fórmula de Taylor com erro de Lagrange:

Suponhamos que a função $f(x)$ seja $(n+1)$ vezes diferenciável no ao redor do ponto p. Então

$$E_n(x)=\frac{f^{n+1}(\overline{x})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para algum $\overline{x}$ entre x e p.

Queremos que $E_n(1)<10^{-5}$. Logo basta tomar n tal que $\dfrac{3}{(n+1)!}<10^{-5}$, (pois $e<3$) ou seja, tal que $(n+1)!>3(10^5)$. Substituindo valores em $(n+1)!$ temos que $n=8$.

5 Use a fórmula de Taylor com erro de Lagrange, observando que $1<\operatorname{sen}\overline{x}<1$ e $1<\cos\overline{x}<1$.

7

$$\operatorname{senh}x^4=x^4+\frac{(x^4)^3}{3!}+O(x^{13})$$

e logo

$$(x-\operatorname{sen}x)^4=\left(\frac{x^3}{3!}+O(x^4)\right)^4=\cdots$$

8 Dicas:

$$\ln(\cos x)=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)=-\left(\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2x}{2}=\frac{1}{2}\left(x+O(x^3)\right)^2=\frac{x^2}{2}+O(x^4)$$

10 **a.)** $\frac{x^2}{2}+c$ **b.)** $\frac{3x^2}{2}+c$ **c.)** $3x+c$ **d.)** $\frac{3x^2}{3}+\frac{x^2}{2}+x+c$ **e.)** $\frac{-1}{x}+c$ **f.)** $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}+c$ **g.)** $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+c$ **h.)** $\frac{7}{3}x^{\frac{9}{7}}+\operatorname{sen}(x)+c$ **i.)** $\frac{1}{4}e^{4x}+c$ **j.)** $\frac{1}{3}(7x^{\frac{9}{7}}+\operatorname{sen}(3x))+c$ **k.)** $(3e^(5x))/5+x^2/2+1/2Sin[2x]+c$ **l.)** $x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)-7\cos\left(\frac{x}{7}\right)+c$ **m.)** Substituição $x=\operatorname{sen}(u)$ **n.)** Substituição $x=tg(u)$, então $dx=\sec^2(u)du$. Assim $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\int\frac{\sec^2(u)}{1+tg^2(u)}du=\int\frac{\sec^2(u)}{\sec^2(u)}du=\int 1du=u+c=\operatorname{arctg}(x)+c$. **o.)** Substituição $u=3^x$, então $du=\ln(3)3^x dx$. Assim $3^x dx=\frac{du}{\ln(3)}$. Portanto,

$$\int 3^x dx=\int\frac{du}{\ln(3)}=\frac{u}{\ln(3)}+c=\frac{3^x}{\ln(3)}+c$$

q.) $\int\operatorname{sen}^2(x)dx=\int\frac{1-\cos(2x)}{2}dx=\frac{x}{2}-\int\frac{\cos(2x)}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}+c=\frac{1}{2}(x-\operatorname{sen}(x)\cos(x)$. Acima fizemos a substituição $u=2x$, então $du=2dx$.

11 **a.)** $x(t)=2-t+t^2$ **b.)** $x(t)=\operatorname{arctg}(t)$ **c.)** $x(t)=\frac{1}{2}\left(2+2t+3t^2\right)$ **d.)** $x(t)=e^{-t}+t$

12 11.8s