Lista 7

Funções de Uma Variável

Integral

1 — Ache os valores numéricos das seguintes somas:

a) $\displaystyle\sum_{r=0}^{3} 2^{2r+1}$

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{6} (2i+1)$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{5} 2^{n-2}$

2 — Prove por indução as seguintes propriedades do somatório:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (aditividade)

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ (homogeneidade)

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (telescópica)

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

3 — Use as propriedades do exercício anterior para mostrar que:

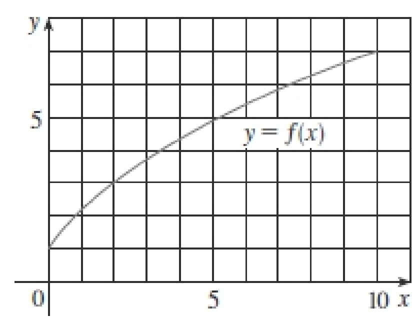
a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ (Dica: Use que $2k-1 = k^2-(k-1)^2$)

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ (Dica: Use o item anterior)

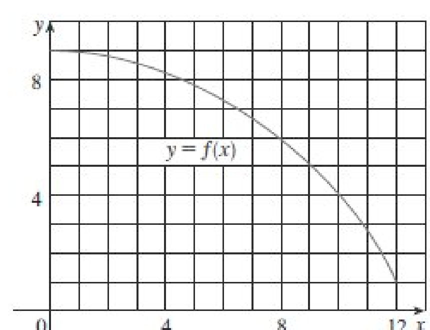
c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ (Dica: $k^3-(k-1)^3 = 3k^2-3k+1$)

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$

4 — Usando as figuras abaixo ache estimativas inferiores e superiores para a área abaixo do gráfico de $f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 10$ usando primeiramente 5 retângulos e posteriormente 10 retângulos.



a)



b)

5 —

a) Defina precisamente partição de um intervalo.

b) Defina precisamente soma de Riemann.

6 — Use uma soma de Riemann com extremos a direita e $n = 8$ para achar uma aproximação da integral

$$\int_0^5 x^2 - 3x$$

7 — Use uma soma de Riemann centrado no ponto médio para achar aproximações da integrais

a) $\int_0^1 \operatorname{sen}(x)\,dx \quad n = 4$

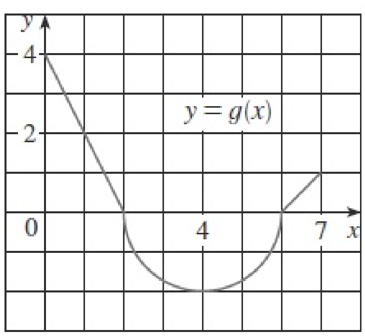
b) $\int_0^1 2^x\,dx \quad n = 10$

8 — O gráfico de g consiste de dois segmentos de retas e um semi-circulo, conforme figura abaixo. Calcule

a) $\int_0^2 g(x)\,dx$

b) $\int_2^6 g(x)\,dx$

c) $\int_0^6 g(x)\,dx$



9 — Calcule a partir da definição as seguintes integrais:

a) $\int_a^b x\,dx$

b) $\int_0^1 2x\,dx$

c) $\int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx$

d) $\int_0^a 1x^3\,dx$

e) $\int_0^2 x^4\,dx$

f) $\int_0^3 x^2 + x\,dx$

g) $\int_a^b (x^2 + x)\,dx$

h) $\int_a^b e^x\,dx$

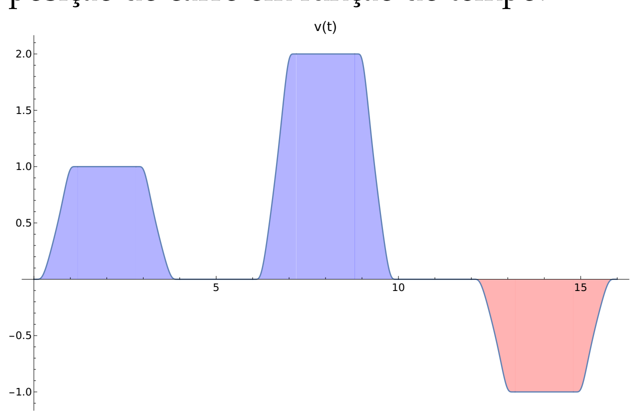
10 — Expresse as seguintes integrais como limite de somatório

a) $\int_0^\pi \cos(x)\,dx$

b) $\int_0^1 e^x\,dx$

c) $\int_0^5 \cos(x)e^x\,dx$

11 — O gráfico abaixo representa a velocidade de um carro em função do tempo. Esboce o gráfico da posição do carro em função do tempo.



Respostas dos Exercícios

1 a.) 170 **b.)** 49 **c.)** 15

2 c.) Base de indução: $n = 1$ $\sum_{k=1}^{1}(a_k - a_{k-1}) = a_1 - a_0$.

Portanto o fato é válido para a base de indução. Provemos a tese de indução.

Hipótese de indução: $\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k-1}) = a_{n-1} - a_0$.

Tese: $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_{n-1} - a_0$.

Note que

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k-1}) + (a_n + a_{n-1}).$$

Usando a hipótese de indução, temos que

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k-1}) + (a_n + a_{n-1}) = a_{n-1} - a_0 + (a_n + a_{n-1}) = a_n - a_0.$$

Como queríamos demonstrar.

3 a.) Como sugere o enunciado,

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2).$$

Note que, se tomarmos $a_k = k^2$, podemos usar a soma telescópica (item c do exercício 5) para obtermos a seguinte igualdade,

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2) = n^2 - 0^2 = n^2.$$

4 A resposta não é única. Uma resposta: **a.)** Inferior

$$1+2+3+3+4+4+5+5+6+6 = 39$$

Superior

$$2+3+4+5+5+6+6+7+7+7 = 52$$

6 Particionando o intervalo de modo a obter 8 subintervalos de tamanhos iguais, i.e., $\Delta x = \frac{5}{8}$, temos que os pontos da partição são dados por $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{5}{8}$, $\ldots$, $x_k = k.\frac{5}{8}$, $\ldots$, $x_8 = 5$. Como utilizaremos o extremo direito para a aproximação, a altura do i-ésimo retângulo é dada por $f(x_i)$. Assim, a soma de Riemann em questão é dada por

$$\sum_{k=1}^{8} f(x_k)\Delta x = \sum_{k=1}^{8} f(k.\frac{5}{8})\frac{5}{8} =$$

$$\sum_{k=1}^{8}\left(\left(k.\frac{5}{8}\right)^2 - 3(k.\frac{5}{8})\right)\frac{5}{8} = \frac{5}{8}\left(\frac{5^2}{8^2}\sum_{k=1}^{8}k^2 - \frac{15}{8}\sum_{k=1}^{8}k\right) =$$

$$\frac{5^2}{8^2}\left(\frac{5}{8}\sum_{k=1}^{8}k^2 - 3\sum_{k=1}^{8}k\right) = \frac{5^2}{8^2}\left(\frac{5}{8}204 - 3.36\right) = \frac{975}{128}$$

8 c.) Note que

$$g(x) = \begin{cases} -2x+4, & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -\sqrt{4-(x-4)^2}, & \text{se } 2 \leqslant x \leqslant 6 \\ x-6, & \text{se } 6 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases}$$

Ainda,

$$\int_0^6 g(x)dx = \int_0^2 g(x)dx + \int_2^6 g(x)dx = \int_0^2(-2x+4)dx + \int_2^6 -\sqrt{4}$$

$$\left[-x^2+4x\right]_0^2 - 2\pi = 4 - 2\pi.$$

Nota, $\int_2^6 \sqrt{4-(x-4)^2}dx = 2\pi$ por se tratar da metade da área do círculo de raio 2.

Mas poderíamos fazer pela substituição $x - 4 = 2\,\text{sen}(y)$. Assim, $dx = \cos(y)dy$. Logo,

$$\int_2^6 \sqrt{4-(x-4)^2}dx = \int_{\text{arcsen}(-1)}^{\text{arcsen}(1)} \sqrt{4-4\,\text{sen}^2(y)}\cos(y)dy =$$

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(y)dy = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1+\cos(2y)dy = 2\left[y + \frac{1}{2}\text{sen}(2y)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

9 a.)

Vamos começar subdividindo o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Desta forma os pontos da partição são:

$$x_0 = a \qquad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \qquad x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \qquad \ldots$$

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \qquad \ldots \qquad x_n = b$$

Agora escolheremos c_k como o extremo direito do subintervalo, isto é, $c_k = x_k$. E logo

$$
\begin{aligned}
\int_a^b x\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[a+k\frac{b-a}{n}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&= (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[a+k\frac{b-a}{n}\right] \\
&= (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} a+\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right] \\
&= (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[na+\frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= (b-a)\lim_{n\to\infty}\left[a+\frac{b-a}{2}\frac{n(n+1)}{n^2}\right] \\
&= (b-a)\left[a+\frac{b-a}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}\right] \\
&= (b-a)\left(a+\frac{b-a}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}(b^2-a^2)
\end{aligned}
$$

c.) Vamos começar subdividindo o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

Desta forma os pontos da partição são:

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = \frac{1}{n}, \qquad x_2 = 2\frac{1}{n}, \qquad \ldots$$

$$x_k = k\frac{1}{n}, \qquad \ldots \qquad x_n = 1$$

Agora escolheremos c_k como o extremo esquerdo do subintervalo, isto é, $c_k = x_{k-1}$. E logo

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \frac{x^2}{2}\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(c_k)}{2}\Delta x \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[(k-1)\frac{1}{n}\right]^2\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n(n+1)+n\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3}\right] \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

d.)

Vamos começar subdividindo o intervalo $[0,a]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{a}{n}$$

Desta forma os pontos da partição são:

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = \frac{a}{n}, \qquad x_2 = \frac{2a}{n}, \qquad \ldots$$

$$x_k = \frac{ka}{n}, \qquad \ldots \qquad x_n = a$$

Agora escolheremos c_k como o extremo direito do subintervalo, isto é, $c_k = x_{k-1}$. E logo

$$
\begin{aligned}
\int_a^b x^2\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{ka}{n}\right]^3\frac{a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{a^4}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3 \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{a^4}{n^4}\left(\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{a^4(n+1)^2}{4n^2} \\
&= \frac{a^4}{4}
\end{aligned}
$$

h.)

Vamos começar subdividindo o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Desta forma os pontos da partição são $x_k = a + k\Delta x$

Agora escolheremos c_k como o extremo direito do subintervalo, isto é, $c_k = x_k$. E logo

$$
\begin{aligned}
\int_a^b e^x \, dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{a+k\Delta x}\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} e^a \Delta x \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{\Delta x^k} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^a \Delta x \frac{e^{\Delta x}\left(e^{\Delta x^n} - 1\right)}{e^{\Delta x} - 1} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^a \Delta x \frac{e^{b-a} - 1}{e^{\Delta x} - 1} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^b - e^a}{(e^{\Delta x} - 1)/\Delta x} \\
&= e^b - e^a
\end{aligned}
$$

10 a.)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(k.\frac{\pi}{n}\right) \frac{\pi}{n}$$

b.)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{k.\frac{1}{n}} \frac{1}{n}$$

c.)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(k.\frac{5}{n}\right) e^{k.\frac{5}{n}} \frac{5}{n}$$