Lista 8
Funções de Uma Variável

Integral II

1 — Use o Teorema Fundamental do Cálculo para achar a derivada das seguintes funções:

a) $\int_0^x \sqrt{1+2t}\,dt$

b) $\int_1^x \ln(t)\,dt$

c) $\int_x^2 \cos(t^2)\,dt$

d) $\int_1^{\cos(x)} (t+\cos(t)\,dt$

e) $\int_1^{e^x} (t+\cos(t))\,dt$

f) $\int_{e^{x^2}}^0 \cos^2(t)\,dt$

g) $\int_{-e^{x^2}}^{e^x} \cos^2(t)\,dt$

h) $\int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t}\cos(t)\,dt$

2 — Use o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular as seguintes integrais ou explique porque elas não existem:

a) $\int_0^1 x^7+3x\,dx$

b) $\int_{-1}^4 x^6\,dx$

c) $\int_{-2}^5 \pi\,dx$

d) $\int_{-1}^4 x^2+3x\,dx$

e) $\int_0^1 x^{3/2}\,dx$

f) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$

g) $\int_1^4 x^{6/7}\,dx$

h) $\int_{-5}^5 \frac{2}{x^3}\,dx$

i) $\int_0^2 x(2+x^5)\,dx$

j) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

k) $\int_0^{\pi/4} \sec^2(x)\,dx$

l) $\int_\pi^{2\pi} \csc^2(\theta)\,d\theta$

m) $\int_0^1 e^{v+1}\,dv$

n) $\int_0^1 5^t\,dt$

o) $\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt$

3 — Calcule as integrais fazendo as seguintes substituições:

a) $\int \cos(3x)\,dx \quad u=3x$

b) $\int x(4+x^2)^{10}\,dx \quad u=4+x^2$

c) $\int x^2\sqrt{x^3+1}dx \quad u = x^3+1$

d) $\int \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx \quad u = \sqrt{x}$

e) $\int e^{\text{sen}\,\theta}\cos(\theta)d\theta \quad u = \text{sen}(\theta)$

4 — Calcule as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int 2x(x^2+3)^4\,dx$

b) $\int (3x-2)^{20}\,dx$

c) $\int (2-x)^{100}\,dx$

d) $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

e) $\int \frac{1}{5-3x}\,dx$

f) $\int \frac{2}{(3t+1)^{2.4}}dt$

g) $\int y^3\sqrt{2y^4-1}dy$

h) $\int \sqrt{4-2x}\,dx$

i) $\int \text{sen}(\pi t)dt$

j) $\int \sec^2(2x)\,\text{tg}(2x)\,dx$

k) $\int \frac{(\ln(x))^2}{x}\,dx$

l) $\int \frac{\text{arctg}(x)}{1+x^2}\,dx$

m) $\int \frac{z^3}{\sqrt[4]{1+z^4}}\,dx$

n) $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

o) $\int \sec^3(x)\,\text{tg}(x)\,dx$

p) $\int x^a(\sqrt{b+cx^{a+1}})dx \quad c \neq 0, a \neq -1$

q) $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

r) $\int xe^{-x^2}\,dx$

s) $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$

5 — Calcule as integrais usando integração por partes e as seguintes escolhas de u e dv:

a) $\int x\ln(x)\,dx, \quad u = \ln(x),\ dv = x\,dx$

b) $\int \theta\sec^2(\theta)d\theta, \quad u = \theta,\ dv = \sec^2(\theta)d\theta$

6 — Calcule as seguintes integrais:

a) $\int x\cos(5x)\,dx$

b) $\int re^{r/3}dr$

c) $\int x^2\cos(mx)\,dx$

d) $\int \ln(2x+1)\,dx$

e) $\int t^3e^tdt$

f) $\int (\ln(x))^2\,dx$

g) $\int z\,\text{senh}(z)dz$

h) $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\,dx$

i) $\int_1^4 \sqrt{t}\ln(t)dt$

j) $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

k) $\int_0^1 x2^x\,dx$

l) $\int \cos(\ln(x))\,dx$

7 — Primeiro faça uma substituição e depois use integração por partes para calcular as integrais:

a) $\int \text{sen}(\sqrt{x})\,dx$

b) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$

c) $\int x^5 e^{x^2}\, dx$

8 — Calcule

a) $\int_0^{\pi/4} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx$

b) $\int_1^2 x^2 \ln x\, dx$

c) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos\theta}\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

d) $\int x \cosh x\, dx$

e) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^3} dx$

9 — Calcule

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{5+t^2}\, dt$$

10 — Ache o valor médio da função no intervalo:

a) $2x^2 - 3x \quad [-1, 2]$

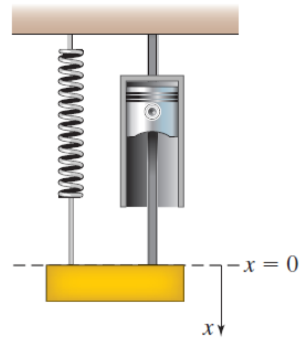
b) $1 + \sqrt{x} \quad [0, 4]$

c) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad [0, 3]$

11 — Movimento Harmônico Amortecido. Considere o sistema mostrado na figura abaixo. Nesse sistema o peso está ligado a uma mola e um dispositivo de amortecimento. Suponha-se que no instante $t = 0$, o peso é colocado em movimento a partir de sua posição de equilíbrio de modo que a sua velocidade em qualquer instante t é

$$v(t) = 3e^{-4t}(1 - 4t)$$

Encontre a função posição $x(t)$ do corpo.



12 — Considere o sistema mostrado na figura acima. O peso é colocado em movimento de um ponto 12 pés abaixo da posição de equilíbrio, de modo que a sua velocidade em qualquer instante t é

$$v(t) = e^{-2t}(\cos 4t - 3\operatorname{sen} 4t)$$

Encontre a função posição do corpo

13 — Calcule o centro de gravidade da região R limitada pelo gráfico $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \frac{2}{\pi}x$ em $[0, \frac{\pi}{2}]$. O centro de gravidade $(\overline{x},\ \overline{y})$ de uma região limitada pelas funções contínuas f e g com $f(x) \geqslant g(x)$ no intervalo $[a, b]$, é dado por

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx$$

$$\overline{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \left[\frac{f(x)+g(x)}{2}\right][f(x) - g(x)]\, dx,$$

sendo A a área da região: $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

Respostas dos Exercícios

1 **a.)** $\sqrt{1+2x}$

b.) $\ln(x)$

c.) $\displaystyle\int_x^2 \cos(t^2)dt = -\int_2^x \cos(t^2)dt$. Assim, $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^2 \cos(t^2)dt = -\cos(x^2)$

d.) Defina $F(x) = \displaystyle\int_1^x (t+\cos(t))dt$. Assim, $\displaystyle\int_1^{\cos(x)} (t+\cos(t))dt = F(\cos(x))$. Portanto, $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^{\cos(x)} (t+\cos(t))dt = \frac{d}{dx}F(\cos(x)) = F'(\cos(x)).\cos'(x) = -(\cos(x)+\cos(\cos(x)))\,\mathrm{sen}(x)$

e.) $(e^x + \cos(e^x))e^x$

f.) $-2x.e^{x^2}\cos(e^{x^2})$

g.) $\displaystyle\int_{-e^{x^2}}^{e^x} \cos^2(t)dt = \int_0^{e^x} \cos^2(t)dt + \int_{-e^{x^2}}^0 \cos^2(t)dt = \int_0^{e^x} \cos^2(t)dt - \int_0^{-e^{x^2}} \cos^2(t)dt$ Assim, a resposta é: $e^x\cos^2(e^x) - 2xe^{x^2}\cos^2(e^{x^2})$.

h.) $3x^2\sqrt{x^3}\cos(x^3) - \dfrac{\sqrt[4]{x}\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

2 **b.)** $\dfrac{4^7+1}{7}$

c.) 7π

f.) $\displaystyle\int_1^8 \sqrt{x}dx = \int_1^8 x^{\frac{1}{3}}dx = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8 = \frac{3}{4}8^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}1^{\frac{4}{3}} = \frac{45}{4}$

j.) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = [2\sqrt{x}]_1^4 = 2.2 - 2.1 = 2$

l.) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \csc^2(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,\theta}d\theta$

dividindo em cima e embaixo por $\cos^2(\theta)$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \csc^2(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2(\theta}{\mathrm{tg}^2\,\theta}d\theta$$

Faça a substituição $u = \mathrm{tg}(\theta)$ e conclua.

m.) Faça a substituição $u = v+1$.

n.) Faça a substituição $u = 5^t$.

4 **a.)** Substituição $u = x^2+3$. Então $du = 2xdx$. Assim $\displaystyle\int 2x(x^2)^4dx = \int u^4du$.

d.) Substituição $u = x^2+1$, então $\frac{1}{2}du = xdx$. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^4}dx = \int \frac{du}{2u^2} + c$

f.) Substituição $u = 3t+1$, então $dt = \frac{1}{3}du$. $\displaystyle\int \frac{2}{(3t+1)^{2.4}}dt = \int \frac{2}{3u^{2,4}}du = -u^{-1,4}\frac{2}{3(1,4)} + c = -\frac{1}{2,1(3t+1)^{1,4}} + c$

g.) Substituição $u = 2^4 - 1$.

j.) Substituição $u = \cos(2x)$, então $\frac{1}{2}du = -\mathrm{sen}(2x)$. Assim $displaystyle\int \sec^2(2x)\,\mathrm{tg}(2x)dx = \int \frac{\sin(2x)}{\cos^3(2x)}dx = -\int \frac{du}{2u^3} = \frac{1}{4u^2} = \frac{1}{4\cos^2(2x)} + c = \frac{\sec^2(2x)}{4} + c$

k.) Substituição $u = \ln(x)$.

l.) Substituição $u = \mathrm{arctg}(x)$, então $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$. Então $\displaystyle\frac{\mathrm{arctg}(x)}{1+x^2}dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\mathrm{arctg}^2(x)}{2} + c$.

m.) Substituição $u = 1 + z^4$.
n.) Substituição $1 + e^x$.
o.) Substituição $u = \cos(x)$.
p.) Substituição $u = b + cx^(a+1)$, então $x^a dx = \dfrac{du}{c(a+1)}$. Assim, $\displaystyle\int x^a \sqrt{b + cx^{a+1}} dx = \int \frac{u}{c(a+1)} du = \frac{u^2}{2c(a+1)} + c = \frac{(b + cx^{a+1})^2}{2c(a+1)} + c$.
q.) Substituição $u = x^2$, então $\dfrac{1}{2} du = x dx$. Assim, $\displaystyle\int \frac{x}{1 + x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u^2} du = \text{arctg}(u) + c = \text{arctg}(x^2) + c$.
r.) Substituição $u = x^2$.
s.) Substituição $u = x^3$.

6 a.) Substituição $y = 5x$, $dx = \dfrac{dy}{5}$. $\displaystyle\int x \cos(5x) dx = \frac{1}{25} \int y \cos(y) dy$. Integração por partes com $u = y$ e $dv = \cos(y) dy$. Então $du = dy$ e $v = \text{sen}(y)$. Assim

$$\frac{1}{25} \int y \cos(y) dy = \frac{1}{25} (y\, \text{sen}(y) - \int \text{sen}(y) dy) =$$

$$\frac{1}{25} (y\, \text{sen}(y) + \cos(y)) + c =$$

$$\frac{1}{25} (5x\, \text{sen}(5x) + \cos(5x)) + c.$$

b.) Partes $u = r$, $dv = e^{\frac{r}{3}} dr$.
c.) $\displaystyle\int x^2 \cos(mx) = x^2 \frac{\text{sen}(mx)}{m} - \frac{2}{m} \int x\, \text{sen}(mx) dx =$
$\displaystyle x^2 \frac{\text{sen}(mx)}{m} - \frac{2}{m} \left(-x \frac{\cos(mx)}{m} + \frac{1}{m} \int \cos(mx) dx \right) =$
$\displaystyle x^2 \frac{\text{sen}(mx)}{m} - \frac{2}{m} \left(-x \frac{\cos(mx)}{m} + \frac{1}{m^2} \text{sen}(mx) \right) + c =$
$\displaystyle \frac{(x^2 m^2 - 2)\, \text{sen}(mx) + 2mx \cos(mx)}{m^3} + c$
d.) Substituição $u = 2x + 1$.
e.) Aplique integração por partes algumas vezes até sumir com o termo t^3. Inicialmente, $u = t^3$ e $dv = e^t dt$.
f.) Substituição $x = e^y$. $\displaystyle\int (\ln(x))^2 dx = \int y^2 e^y dy = y^2 e^y - 2 \int y e^y dy =$
h.) Partes com $u = x^2 + 1$ e $dv = e^{-x}$.
i.) Partes $u = \ln(t)$ e $dt = \sqrt{t} dt$.

$$\int_1^4 \sqrt{t} \ln(t) dt = \left[\frac{2}{3} \ln(t) . t^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 - \frac{2}{3} \int_1^4 \sqrt{t} dt =$$

$$\frac{16}{3} \ln(4) - \frac{4}{9} \left[t^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{16}{3} \ln(4) - \frac{28}{9}$$

j.) Partes $u = \ln(x)$ e $dv = x^{-2} dx$.
k.) Partes $u = x$ e $dv = 2^x dx$. Então $du = dx$ e $v = \dfrac{2^x}{\ln(2)}$.
l.) Substituição $x = e^u$.

$$\int \cos(\ln(x)) dx =$$

$$\int \cos(u)e^u du = \cos(u)e^u + \int \operatorname{sen}(u)e^u du = \cos(u)e^u + \operatorname{sen}(u)e^u - \int \cos(u)e^u du$$

Então

$$\int \cos(u)e^u du = e^u(\cos(u) + \operatorname{sen}(u)) - \int \cos(u)e^u du$$

. Somando $\int \cos(u)e^u du$ a ambos os lados temos:

$$2\int \cos(u)e^u du = e^u(\cos(u) + \operatorname{sen}(u))$$

Assim,

$$\int \cos(u)e^u du = \frac{e^u(\cos(u) + \operatorname{sen}(u))}{2}$$

Voltando à variável inicial, x, temos

$$\int \cos(\ln(x))dx = \frac{x(\cos(\ln(x)) + \operatorname{sen}(\ln(x)))}{2}$$

9 Defina

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{5+t^2}dt.$$

Note que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_2^{2+h} \sqrt{5+t^2}dt = \lim_{h\to 0} \frac{F(2+h) - F(h)}{h} = F'(2)$$

Pelo teorema fundamental do cálculo 1,

$$F'(2) = \sqrt{5+2^2} = 3.$$

10 **a.)** $f_{med} = \dfrac{1}{2-(-1)}\displaystyle\int_{-1}^{2} 2x^2 - 3x dx = \dfrac{\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{2}}{3} = 3$