Lista 10
Funções de Uma Variável

Técnicas de Integração I

1 — Determine α e β de modo que:

$$\operatorname{sen}(6x)\cos(4x) = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen}(\alpha x) + \operatorname{sen}(\beta x)\Big).$$

Dica: use que:

$$\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\right)$$

2 — Usando a técnica do exercício anterior calcule:

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(6x)\cos(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\cos(6x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\,dx$

d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\,dx$

3 — Usando que

$$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

calcule as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(5x)\,dx$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(7x)\,dx$

c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)\,dx$

4 — Usando que

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}((\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

calcule:

a) $\displaystyle\int \cos(x)\cos(5x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi} \cos(x)\cos(7x)\,dx$

c) $\displaystyle\int \cos(nx)\cos(mx)\,dx$

5 — Calcule a área da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$.

Para calcular $\int \operatorname{sen}^n(x)\cos^m(x)\,dx$ faça as seguintes transformações:

- Se n for ímpar faça $u = \cos(x)$ observando que

$$\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^{2k+1}(x)dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^m(1-\operatorname{sen}^2(x))^k\cos(x)dx$$

  Por fim faça a substituição $u = \operatorname{sen}(x)$
- Se m for ímpar faça $u = \operatorname{sen}(x)$

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1}(x)\cos^m(x)dx$$

$$= \int \cos^m(1-\cos^2(x))^k\operatorname{sen}(x)dx$$

  Por fim faça a substituição $u = \cos(x)$
- Se n e m forem pares faça $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ e use as fórmulas de recorrência.

6 — Calcule:

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(8x)\,dx$

b) $\int \text{sen}^3(x)\, dx$

c) $\int \cos^2(4x)\, dx$

d) $\int \text{sen}(x)\cos^4(5x)\, dx$

e) $\int \text{sen}(2x)\cos^2(2x)\, dx$

f) $\int_0^{\pi/4} \text{sen}^2(2x)\cos^2(2x)\, dx$

g) $\int_0^{\pi} \cos(x)\cos^2(4x)\, dx$

h) $\int x\cos^4\left(x^2\right)\, dx$

7 — Ache a área da região limitada pelos gráficos de $y = \text{sen}^4 x$, $y = \cos^3(x)$, $x = 0$ e $x = \pi/4$.

8 — A região sob o gráfico de $y = \text{sen}^3 x$ no intervalo $[0, \pi]$ é girado em torno do eixo y. Encontre o volume do sólido gerado.

9 — Ache o centroide (centro de massa) da região R abaixo do gráfico de $y = \text{sen}^2 x$ no intervalo $[0, \pi/2]$

10 — A região sob o gráfico de $y = \text{sen}\, x/\cos^3 x$ no intervalo $[0, \pi/4$ é girado em torno do eixo x. Encontre o volume do sólido gerado.

11 — Calcule as integrais usando substituição trigonométrica. Esboce o triângulo retângulo associado

a) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\, dx$

b) $\int x^2\sqrt{9-x^2}\, dx$

c) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\, dx$

d) $\int_0^{\frac{2}{3}} x^3\sqrt{4-9x^2}\, dx$

e) $\int x\sqrt{1-x^4}\, dx$

f) $\int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{5/2}}$

12 — Calcule as integrais usando substituição trigonométrica. Esboce o triângulo retângulo associado

a) $\int \frac{\sqrt{x^2-11}}{x}\, dx$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}\, dx$

c) $\int \frac{8}{\sqrt{x^2+2}}\, dx$

13 — Calcule as seguintes integrais:

a) $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$

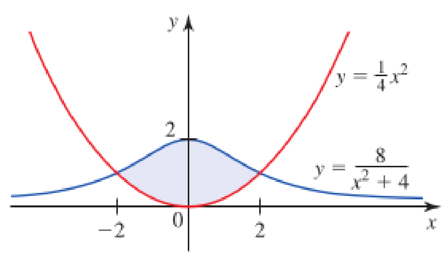
b) $\int \sqrt{1-4x^2}\, dx$

c) $\int \sqrt{1-\cos(x)}\, dx$

d) $\int \sqrt{3+4x^2}\, dx$

e) $\int \sqrt{x^2+2x+2}\, dx$

14 — Ache a área da região limitada pelos gráficos da parábola $y = \frac{1}{4}x^2$ e a curva de Agnesi $y = \frac{8}{x^2+4}$.

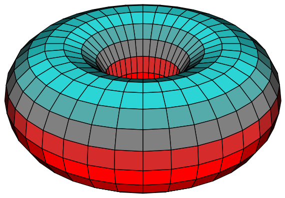


15 — A região sob o gráfico de $y = \frac{x}{16-x^2}$ no intervalo $[0, 2$ é girado em torno do eixo y. Encontre o volume do sólido gerado.

16 — Um toro é obtido rotacionando ao redor do eixo y o círculo

$$(x-b)^2 + y^2 = a^2.$$

Mostre que a área do toro é $4\pi ab$



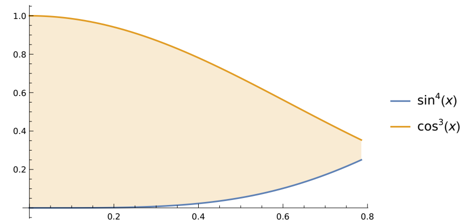
17 — Mostre que a área de um elipsoide de revolução obtido rotacionando a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

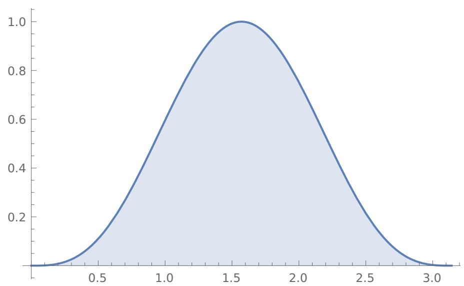
em torno do eixo x é

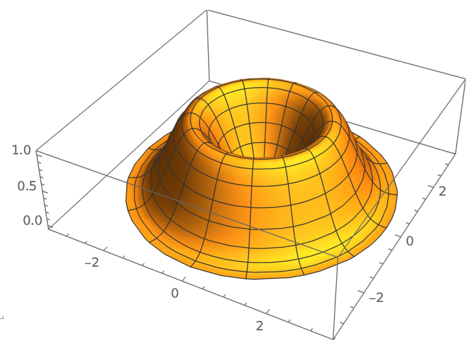
$$A = 2\pi ab\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{c}\,\text{sen}^{-1}\,\frac{c}{a}\right)$$

Respostas dos Exercícios

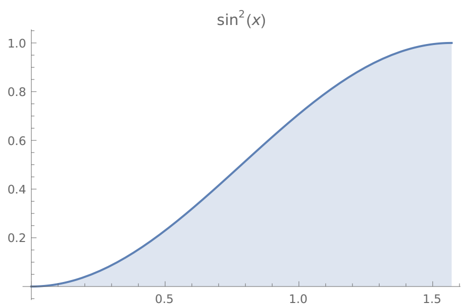


7 $\frac{1}{96}\left(40\sqrt{2}-9\pi+24\right)$

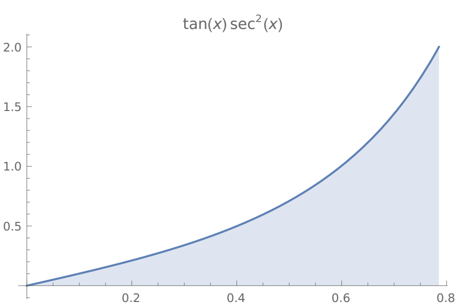


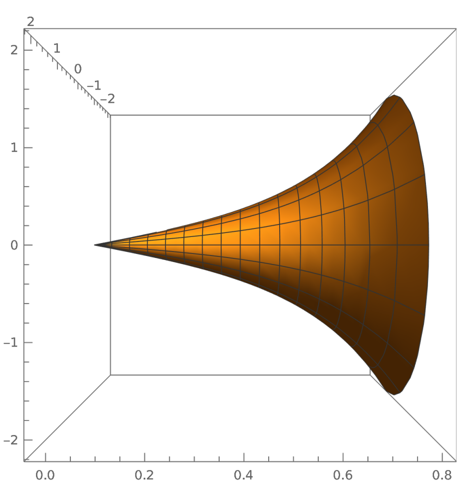


8 $\frac{4\pi^2}{3}$



9 $\left(\frac{4+\pi^2}{4\pi}, \frac{3}{8}\right)$

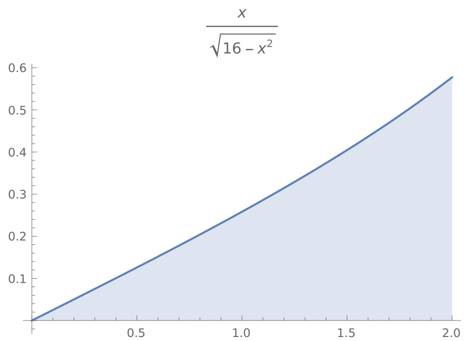


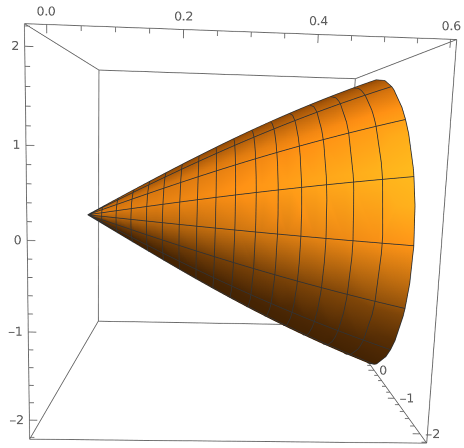


10 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi \left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos^3(x)}\right)^2 \, dx = 8\pi/15$

12 **a.)** $\sqrt{x^2-11}-\sqrt{11}\sec^{-1}(x/\sqrt{11})+C$ **b.)** $\sqrt{x^2-3}+C$ (Não precisa de substituição trigonométrica) **c.)** $8\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}}+\frac{x}{\sqrt{2}}\right|+C$

14 $2\pi-\frac{4}{3}$

15 



$$\int_0^2 \frac{2\pi x x}{\sqrt{16-x^2}}\,dx = \frac{4}{3}\pi\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$$