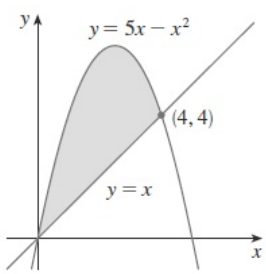
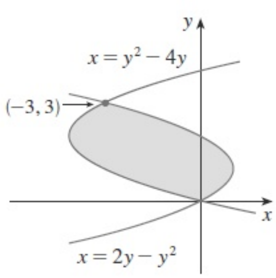
Lista 9
Funções de Uma Variável

Aplicações de Integração

Áreas

1 — Determine a área da região em cinza:

a) 

b) 

2 — Esboce a região delimitada pelas curvas e decida se a integração deve ser feito com relação a variável x ou y. Desenhe um retângulo típico com sua altura e largura. Finalmente ache a área da região.

a) $y = x + 1, \quad y = 9 - x^2, \quad x = -1, \quad x = 2$

b) $y = \text{sen}(x), \quad y = x^2$

c) $y = x^2, y = x^4$

d) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad x + y = 1$

e) $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

f) $x = 2y^2 \quad x + y = 1$

g) $y = \cos(x) y = 1 - 2x/\pi$

h) $y = \text{sen}(\pi x) \quad y = x^2 - x \quad x = 2$

i) $y = \sec^2(x) \quad y = \cos(x), \quad x = -\frac{-\pi}{3} \quad x = -\frac{\pi}{3}$

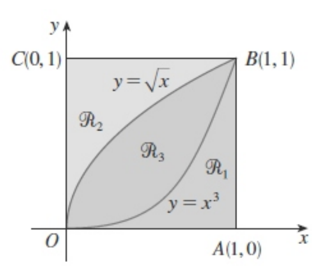
3 — Ache a área da região delimitada pela parábola $y = x^2$ a reta tangente a está parábola no ponto $(1, 1)$ e o eixo x.

4 — Ache o número b tal que a reta $y = b$ divida a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$ em duas regiões de áreas iguais.

5 — Determine c para que a área da região delimita pelas parábolas $y = x^2 - c^2$ e $y = c^2 - x^2$ seja 576.

Volumes

6 — Dada a figura abaixo ache o volume do sólido gerado rotacionando a região indicada em torno da reta especificada:



a) $\mathcal{R}_1$ ao longo de OA

b) $\mathcal{R}_1$ ao longo de OC

c) $\mathcal{R}_1$ ao longo de AB

d) $\mathcal{R}_1$ ao longo de BC

e) $\mathcal{R}_2$ ao longo de OA

f) $\mathcal{R}_2$ ao longo de OC

g) $\mathcal{R}_2$ ao longo de AB

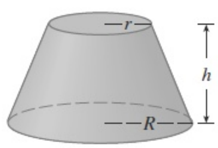
h) $\mathcal{R}_3$ ao longo de OA

i) $\mathcal{R}_3$ ao longo de OC

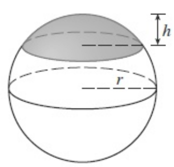
7 — Determine o volume dos sólidos S, usando integração.

a) Um cone circular reto de altura h e base r.

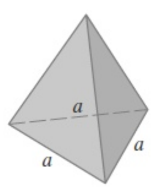
b) Um cone truncado de base circular



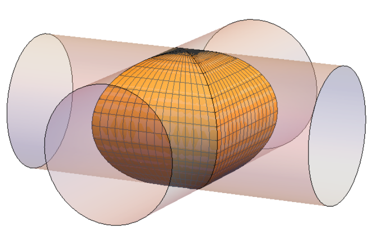
c) Uma calota esférica



d) Uma piramide de altura h e base um triângulo equilátero de lado a.



e) A região delimitada por dois cilindros circulares retos que se interceptam perpendicularmente.



f) Ache o volume comum a duas esferas de raio r se o centro de cada esfera está na superfície da outra.

8 — Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume da região gerada pela rotação em torno do eixo y da região delimitada pelas curvas abaixo:

a) $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

b) $y = x^2, \quad y = 0 \quad x = 1$

c) $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

9 — Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume da região gerada pela rotação em torno do eixo x da região delimitada pelas curvas abaixo:

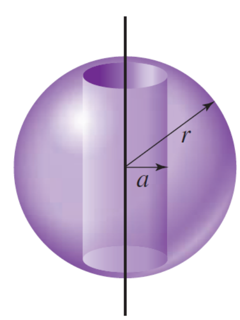
a) $x = 1 + y^2, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = 2$

b) $x = \sqrt{y} \quad x = 0, \quad y = 1$

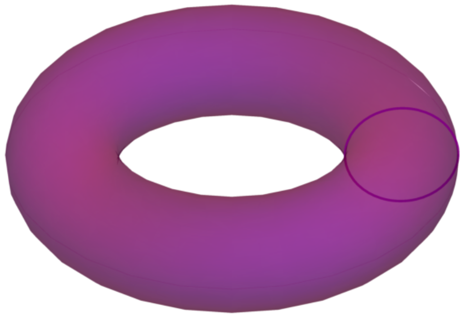
10 — Encontre o volume do sólido que permanece depois que um furo circular de um raio é perfurado através do centro de uma esfera sólida de raio $r > a$ por:

a) Seções transversais.

b) Cascas cilíndricas.



11 — Deduza a fórmula do volume do toro obtido ao girarmos o círculo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ em torno do eixo x.

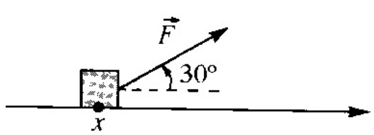


Trabalho

12 — Calcule o trabalho realizado pela força $F(x)$ quando a partícula se desloca de a até b:

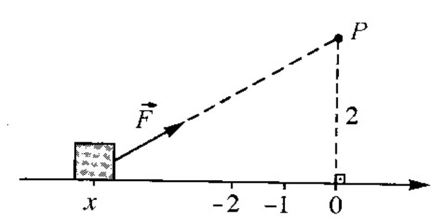
a) $F(x) = 3$ de $a = 0$ até $b = 2$
b) $F(x) = x^2 + 3x$ de $a = -1$ até $b = 2$
c) $F(x) = \frac{-1}{x^2}$ de $a = 1$ até $b = 2$
d) $F(x) = \operatorname{sen}(x)$ de $a = 0$ até $b = \pi$
e) $F(x) = x^5$ de $a = 1$ até $b = 3$

13 — Sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo x atua uma força $\vec{F}$ de intensidade $3x$ e que forma com o eixo x um ângulo de 30°



Calcule o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao deslocar a partícula de $x = 0$ até $x = 3$.

14 — Sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo x atua uma força $\vec{F}$ sempre dirigida para o ponto P e cuja intensidade é igual ao inverso do quadrado da distância da partícula a P

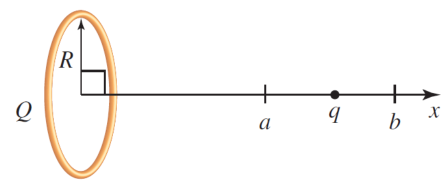


Calcule o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao deslocar a partícula de $x = -2$ até $x = -1$.

15 — Trabalho feito por uma Carga Repulsiva. Uma carga elétrica Q uniformemente distribuída ao longo de um condutor em forma de anel de raio a repele uma carga q como ao longo da linha perpendicular à plano do anel, através do seu centro. A magnitude do força que atua sobre a carga q quando está no ponto x é dado por

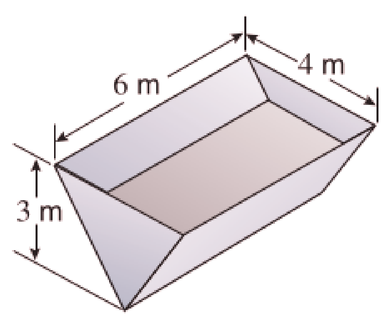
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQx}{x^2 + R^2}^{\frac{3}{2}}$$

e a força atua na direção do eixo x positivo. Encontre o trabalho realizado pela força de repulsão em mover o carga q de $x = a$ a até $x = b$.



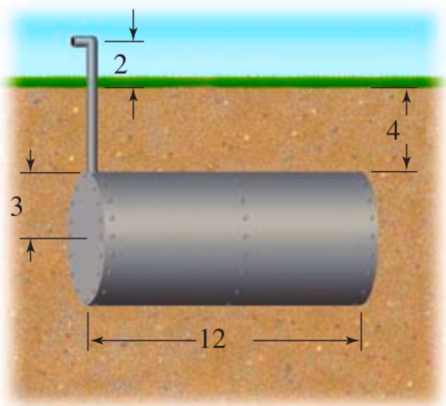
16 — Uma partícula se move ao longo do eixo x com uma função velocidade $v(t) = t^2 e^{-t}$
Qual a distância percorrida pela partícula entre $t = 0$ e $t = 5$?

17 — Um tanque como o da fígura abaixo está cheio de agua. Encontre o trabalho necessário para bombear todo o líquido a um nível de 1 metro acima do topo do tanque.



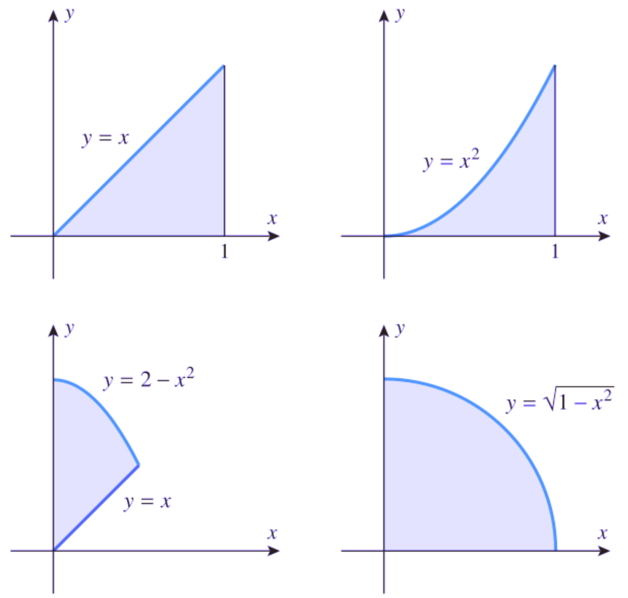
18 — Um balde de 10 kg, furado, é levantado do chão até uma altura de 12 m a uma velocidade constante, por uma corda que pesa 0,8 kg/m. Inicialmente o balde contém 36 kg de água, mas a água vaza a uma taxa constante e o balde acaba vazio exatamente quando atinge a altura de 12 m. Quanto trabalho foi realizado?

19 — Um tanque de armazenamento de gasolina em forma de um cilindro direito de raio de 3 metros e comprimento de 12 metros está enterrado em o solo em posição horizontal. Se o topo do tanque estiver 4 metros abaixo da superfície, encontre o trabalho necessário para esvaziar um tanque cheio de gasolina pesando $670 \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$ bombeando-o através de um tubo que se estende a uma altura de 2 metros acima do chão.



Centro de Massa

20 — Encontre o centróide das seguintes regiões



21 — Encontre a massa e o centroide das lâminas descritas abaixo

a) A lâmina delimitada pelo eixo x, a reta $x = 1$ e a curva $y = \sqrt{x}$ e de densidade $\delta = 2$.

b) A lâmina delimitada pelo eixo x, a reta $x = 1$ e a curva $x = y^4$ e de densidade $\delta = 14$.

c) A lâmina delimitada pelo eixo x, e a curva $x = 1 - x^2$ e de densidade $\delta = 4$.

Comprimento de Arco

22 — Encontre o comprimento de arco do gráfico da equação dada entre os pontos P e Q ou no intervalo especificado.

a) $y = -2x + 3 \quad P : (-1, 5), Q : (2, -1);$

b) $\cosh(x) \quad [0, \ln(2)]$

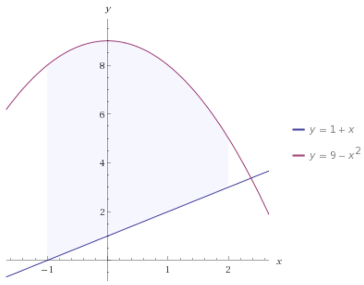
c) $\ln \cos x \quad [0, \pi/4]$

d) $\sqrt{4 - x^2} \quad [0, 2]$

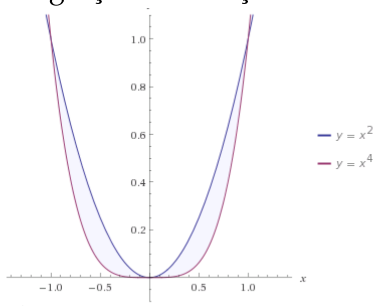
Respostas dos Exercícios

1 $\int_0^4 (5x - x^2) - x \, dx = 32/3$

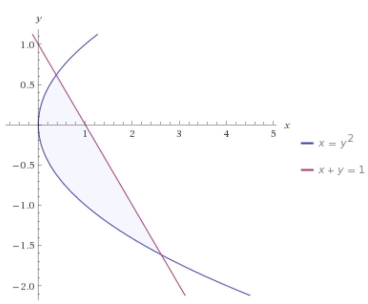
2 **a.)** $\int_{-1}^{2} \left(8 - x - x^2\right) \, dx = 39/2$



c.)
Integração em relação a x



$\int_{-1}^{1} x^2 - x^4 \, dy = 4/15$



f.)
$\int_{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})} \left(1 - y - y^2\right) \, dy$

4 Queremos determinar b tal que $\int_{-b}^{b} \sqrt{y} \, dy = \int_{-4}^{-b} + \int_{b}^{4} \sqrt{y} \, dy \sqrt{y} \, dy$

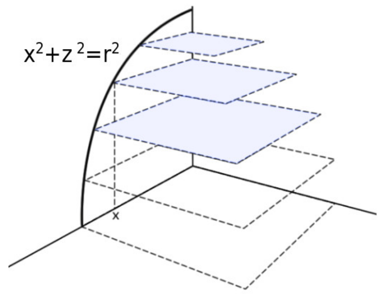
Logo $b = 4^{2/3}$.

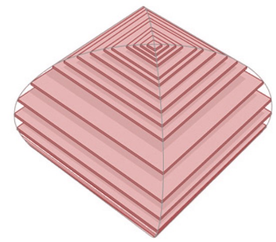
6 **a.)** $\int_0^1 \pi(x^3)^2 \, dx = \pi/7$ **c.)** $\int_0^1 \pi(1 - \sqrt[3]{y})^2 \, dy = \pi/10$ **e.)** $\int_0^1 \pi(1^2 - (\sqrt{x})^2) \, dx = \pi/2$ **g.)** $\int_0^1 \pi(1^2 - (1 - y^2)^2) \, dy = 7\pi/15$

7 **a.)** O cone pode ser obtido rotacionando a reta $y = \frac{r}{h}x$ em torno do eixo x. Logo $V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \, dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

c.) $V = \pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - y^2) \, dy = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$

e.)





Uma seção vertical do sólido de é um quadrado de lado a. Uma vez que o sólido é obtido a partir da intersecção de dois cilindros de raio r, a largura do quadrado x e a altura z são relacionadas por

$$x^2 + z^2 = r^2$$

Desta forma área do quadrado é $A = x^2$ que pode ser expressa em termos de z como z:

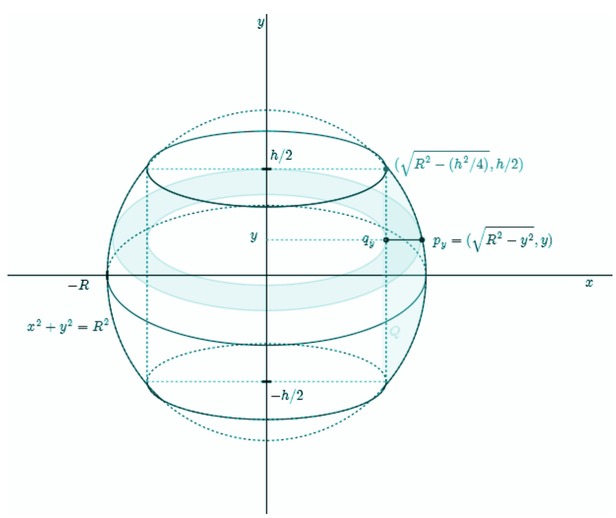
$$A(z) = x^2 = r^2 - z^2$$

O método de integração por fatias cilindricas fornece então que o é dada por

$$V = 8\int_0^r A(z)dz = 8\int_0^r (r^2 - z^2)dz = 8\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{16}{3}r^3$$

Destacamos que é necessário multiplicar por 8 pois a integral acima representa apenas 1/8 do sólido

10 a.)



$$V = \int_{-h/2}^{h/2} \pi\Big[\Big(\underbrace{\sqrt{R^2 - y^2}}_{\text{raio de fora}}\Big)^2 - \Big(\underbrace{\sqrt{R^2 - (h^2/4)}}_{\text{raio de dentro}}\Big)^2\Big]\, dy = \int_{-h/2}^{h/2} \pi\big(\tfrac{h^2}{4} - y^2\big)\, dy.$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \pi\big(\tfrac{h^2}{4} - y^2\big)\, dy \tag{1}$$

$$= 2\int_0^{h/2} \pi\big(\tfrac{h^2}{4} - y^2\big)\, dy$$

(2)

$$= 2\pi\big[\tfrac{h^2}{4}y - \tfrac{y^3}{3}\big]\Big|_0^{h/2}$$

$$(3)$$
$$= 2\pi\left[\tfrac{h^3}{8} - \tfrac{h^3}{24}\right]$$
$$(4)$$
$$= \tfrac{\pi h^3}{6}. \qquad (5)$$

11 A região é delimitada superiormente por $y = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ e inferiormente por $y = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ com $x \in [-r, r]$. Assim, definindo $K = \sqrt{r^2 - x^2}$, o volume do toro é dado pela integral

$$\int_{-r}^{r} \pi[(R+K)^2 - (R-K)^2]dx = \int_{-r}^{r} 4\pi RK dx$$
$$= 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Como $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx$ é metade da área do círculo de raio r, esta integral vale $\dfrac{\pi r^2}{2}$. Assim o volume do toro é $4\pi R \dfrac{\pi r^2}{2} = (2\pi R)(\pi r^2)$.

18 3 857 J

22 $\int_0^{\ln(2)} \sqrt{\cosh^2 x}\, dx$

Dica: $\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x)+1}{2}$