Lista 11
Funções de Uma Variável

Técnicas de Integração II

1 — Dados α, β, m, n constantes, com $\alpha \neq \beta$ mostre que existem A e B tais que:

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

2 — Usando o exercício anterior calcule as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx$

b) $\displaystyle\int_7^9 \frac{x-1}{x(x-2)}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-4}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+3x+2}\,dx$

3 — Seja $\alpha \neq 0$. Mostre que:

$$\int \frac{1}{\alpha^2+x^2}dx = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}(\frac{x}{\alpha}) + k$$

Use esse fato para calcular as integrais:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{5+x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{3+4x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{5+x^2}\,dx$

4 — Prove que dados α, m, n constantes mostre que existem A e B tais que:

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}.$$

5 — Calcule as seguintes integrais por frações parciais:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-9}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx$

c) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x+3}{(x-1)^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2-2x+1}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2-4}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^4+x+1}{x^3-x}\,dx$

6 — Use a decomposição de fração parcial (ou uma técnica mais simples) para expressar a função racional como uma soma ou diferença de duas ou mais expressões racionais mais simples.

a) $\displaystyle\frac{x^2+1}{x(x+1)(x+2)}$

b) $\displaystyle\frac{2x^4}{x^2-2x}$

c) $\displaystyle\frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{(x+1)(x^2+4)^2}$
$\displaystyle\frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{(x+1)(x^2+4)^2}$

7 — Calcule as seguintes integrais por frações parciais:

a) $\displaystyle\int \frac{12x^2+21x+3}{(x+1)(3x^2+5x-2)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2+9)}\,dx$

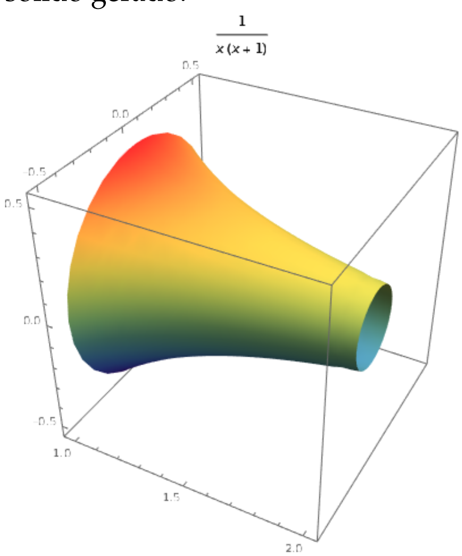
c) $\displaystyle\int \frac{6x^2+8x-4}{(x-3)(x^2+6x+10)}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+5}{x^2+4x+10}\,dx$

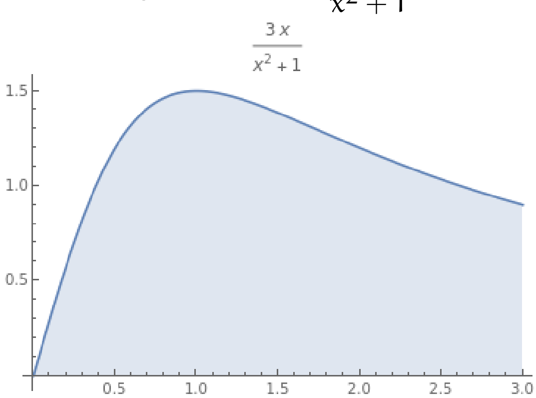
e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+2x^2+3x}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^3+6x^2+3x+6}{x^3+2x^2}\,dx$

8 — A região sob o gráfico de $y = \dfrac{1}{x(x+1)}$ no intervalo $[1,2]$ é girado em torno do eixo x. Encontre o volume do sólido gerado.



9 — Ache o centroide (centro de massa) da região R abaixo do gráfico de $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$ no intervalo $[0,2]$



10 — Nos exercícios a seguir use a substituição para converter as integrais em integrais de funções racionais. Em seguida, use frações parciais para avaliar as integrais.

a) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-e^x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)+\cos(x)-6}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx; \quad x = u^6$

11 — Encontre o volume do sólido gerado quando a região limitada por $y = \dfrac{1}{\sqrt{x(3-x)}}$, $y=0$, $x=1$, e $x=2$ é girada em torno do eixo x.

12 — A velocidade de uma partícula se movendo ao longo de uma linha é uma função do tempo dada por $v(t) = \dfrac{88t^2}{t^2+1}$.. Encontre a distância que a partícula viajou após $t = 5$ seg.

13 — Encontre a coordenada x do centróide da área limitada por $y(x^2-9)=1$, $y=0$, $x=4$, e $x=5$.

14 — Calcule o comprimento de arco da curva sobre o intervalo:

a) $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}$ sobre $[0,1]$.

b) $y = \ln x$ sobre o intervalo $[1,2]$.

c) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ sobre $[0, \ln 5]$.

15 — Uma estrada é construída ligando o ponto $(2,1)$ ao ponto $(5,3)$ seguindo a trajetória da parábola:

$$y = -1 + 2\sqrt{x-1}$$

Calcule o comprimento da estrada.

16 — Mostre que

$$\int_0^1 \frac{16(x-1)}{x^4-2x^3+4x-4}\,dx = \pi$$

17 — Mostre que

$$\int x^3 \operatorname{tg} x \, dx = \frac{1}{4}(x^4 - 1)\operatorname{tg}(x) - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x + C$$

18 — Calcule a integral

$$\int \operatorname{tg} x \sec^4 x \, dx$$

de duas maneiras diferentes. Prove que os dois resultados são equivalentes.

Respostas dos Exercícios

1 $A = -\frac{-\alpha m - n}{\alpha - \beta}, B = -\frac{\beta m + n}{\alpha - \beta}$

6 **a.)** $\dfrac{x^2+1}{x(x+1)(x+2)} \quad = \quad -\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{5}{2(x+2)} + \dfrac{1}{2x}$

b.) $\dfrac{2x^4}{x^2-2x} \quad = \quad 2x^2+4x+8+\dfrac{16}{x-2}$

c.) $\dfrac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{(x+1)(x^2+4)^2} \quad = \quad \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{x}{x^2+4} - \dfrac{1}{(x^2+4)^2}$

7 **a.)** $3\left(\frac{1}{2}\log(x+1) + \frac{3}{7}\log(x+2) + \frac{17}{42}\log(4-3(x+1))\right) + C$

b.) $\frac{9}{10}\ln\left|x^2+9\right| + \frac{1}{5}\ln|x+1| - \frac{4}{15}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

c.) $2\ln|x-3| + 2\ln|x^2+6x+10| - 4\operatorname{tg}^{-1}(x+3) + C$

d.) $-\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+10\right| + x + \frac{\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)}{\sqrt{6}} + C$

e.) $\frac{1}{6}\left(-\ln\left|x^2+2x+3\right| + 2\ln|x| - \sqrt{2}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right) + C$

f.) $\displaystyle\int \frac{x^3+6x^2+3x+6}{x^3+2x^2}\,dx \quad = \quad -\frac{3}{x} + 4\ln|x+2| + x + C$

8 $\int_1^2 \frac{\pi}{(x(x+1))^2}\,dx = \pi\left(\frac{2}{3} - \log\left(\frac{16}{9}\right)\right)$

9 $\left(-\frac{2\left(\operatorname{tg}^{-1}(2)-2\right)}{\log(5)}, \frac{5\operatorname{tg}^{-1}(2)-2}{5\log(5)}\right)$

10 **a.)** $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-e^x}\,dx \quad = \quad -x + \ln|1-e^x| + C$

b.) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x + \cos x - 6}\,dx \quad = \quad \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\cos x + 3}{\cos x - 2}\right| + C$

c.) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} \quad = \quad 2\sqrt{1+x} - 2\ln|1+\sqrt{1+x}| + C$

e.) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx \quad = \quad 6x^{1/6} - 3x^{1/3} + 2\sqrt{x} - 6\ln(1+x^{1/6}) + C$

11 $V = \frac{4}{3}\operatorname{arctanh}\left[\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}\ln 4\ \text{units}^3$

14 **a.)** 4/3

c.) 12/5