Lista 12
Funções de Uma Variável

Técnicas de Integração e Integrais Impróprias

Técnicas de Integração

1 — Calcule:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x+3}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln t)\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x+3}}\,dx$

e) $\displaystyle\int \csc^6(2t)\,dt$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+4x-3}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x^3-x^2-2x}\,dx$

h) $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x^2\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh} x}{1+\cosh x}\,dx$

j) $\displaystyle\int e^{3z}\cos(4z)dz$

k) $\displaystyle\int \frac{4x^4+x+1}{x^5+x^4}\,dx$

l) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2(2t)\sec^4(2t)\,dt$

m) $\displaystyle\int \frac{x^2\sqrt{4x^2-9}}{dx}$

n) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$

o) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^5(2x)\,dx$

p) $\displaystyle\int \sqrt{y}\ln y\,dy$

q) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x-2}\,dx$

r) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16x^2+9}}\,dx$

s) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16x^2+9}}\,dx$

t) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16x^2+9}}\,dx$

u) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh}\ln x}{x}\,dx$

v) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3x)\cos(8x)\,dx$

2 — Calcule:

a) $\displaystyle\int 2^{-\sqrt{x}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{sen} x}{\sec x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{e^{4t}}{(e^{2t}-1)^3}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+16}}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(x)\,dx$

f) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x)\cos(8x)\,dx$

g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx$

h) $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx$

i) $\displaystyle\int \sec^3(x)\,dx$

j) $\displaystyle\int \sec^5(x)\,dx$

k) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \cos 2x\,dx$

l) $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^2+3x+2}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+1}{x^3-x}\,dx$

3 — Use o método das cascas cilíndricas para calcular o volume do sólido obtido rotacionando a região R em torno do eixo y. Esboce o sólido obtido.

a) R é limitada por baixo pelo eixo x e acima por $y = \cos x$ entre $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

b) R é limitada por baixo pelo eixo x, a direita pela reta $x = e$ e acima por $y = \ln x$ entre $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

4 — Calcule o comprimento da curva $y = \log(\operatorname{sen}(x))$ com $\pi/3 \leqslant x \leqslant 3\pi/4$.

5 — Calcule o comprimento da curva $y = \frac{4}{5}x^{5/4}$ com $0 \leqslant x \leqslant 1$.

6 — Calcule o comprimento da curva $y = \frac{3}{4}x^{3/4}$ com $0 \leqslant x \leqslant 1$.

7 — Calcule o comprimento da curva $y = e^{-x}$ com $0 \leqslant x \leqslant 1$.

8 — Suponha que queiramos construir uma estrada que une os pontos $(0,0)$ e $(3,2)$ e segue o caminho do círculo com a equação $(4x+4)^2 + (4y-19)^2 = 377$. Encontre o comprimento desta estrada.

9 — Mostre que o comprimento de um arco da curva senoidal $y = \operatorname{sen} x$ é igual à metade da circunferência da elipse $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$.

Integrais Impróprias

10 — Calcule as integrais impróprias abaixo:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$ [Dica no final]

11 — Determine para quais valores de $p > 0$ cada integral abaixo converge e, nesse caso, calcule a integral:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$

12 — Determine se a integral diverge ou converge e, nesse último caso, calcule a integral:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen} x\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+4x+9}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

f) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\, dx$

g) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$

h) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x(1+\ln^2)}\, dx$

i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right) dx$ [Dica no final]

j) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x+1}\, dx$

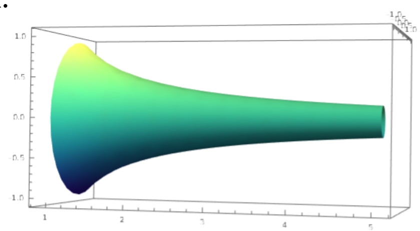
k) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2-x+1}\, dx$

l) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\, dx$

m) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{(x^2-1)^2}\, dx$

Dicas 1e) $\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}$. 3g)Integre por partes $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x}\, dx$ e compare com a integral da outra parcela.

13 — A Trombeta de Gabriel ou Trombeta de Torricelli, é uma superfície de revolução que se obtém girando a curva $y = \frac{1}{x}$ com $x \geqslant 1$ em torno do eixo x.



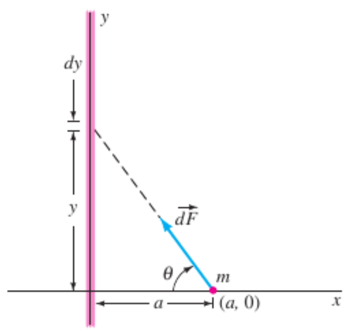
Mostre que o volume encerrado pela Trombeta é finito e calcule-o.

14 — Sabendo que para uma função $f(x)$ não negativa e diferenciável no intervalo $[a, b]$ a área da superfície de revolução formada pela rotação do gráfico de $f\ (x)$ em torno do eixo x é dada por

Área Superficial $= \int_a^b (2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2})dx$.

Calcule a área da superfície da Trombeta de Gabriel. (Compare com o exercício anterior! Os dois resultados juntos geram um fato surpreendente)

15 — Uma haste de densidade linear δ ocupa todo o eixo y. Um ponto de massa m está localizado em $(a, 0)$ no eixo x, conforme indicado na figura abaixo Calcule a força de atração gravitacional que a haste exerce sobre m.



Respostas dos Exercícios

4 $\frac{\log(3)}{2} + \log\left(\cot\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

5 Substituição $u = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 1$

7 $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{1+e^2}}{e} - \log\left(\sqrt{2}+1\right) + \log\left(\sqrt{1+e^2}+e\right)$

13 π

14 A área é infinita. Observamos uma área infinita, porém volume finito. Daí concluímos que precisaríamos de uma quantidade de tinta infinita para pintar a parte interna do trompete. Porém, uma quantidade finita de tinta, ao ser despejada dentro do trompete, o preencheria, pintando completamente

15 $\frac{2Gm\delta}{a}$