UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 4

Gradiente e Derivada Direcional

1 — Esboçe a curva de nível de $f(x,y)$ que passa P e desenhe o vetor gradiente em P:

(a)
$$f(x,y)=\frac{x}{y^2},\ P=(-2,2)$$

(b)
$$f(x,y)=x^2+4y^2,\ P=(-2,0)$$

(c)
$$f(x,y)=x^2-y^2,\ P=(2,-1)$$

2 — Considere a superfície $xz-yz^3+yz^2=2$

(a) Determine a equação do plano tangente à superficie no ponto $(2,-1,1)$.

(b) determine as equações parametricas da reta que é normal à superficie no ponto $(2,-1,1)$

3 — Determine a derivada direcional de f em P na direção do vetor u:

(a)
$$f(x,y)=sen(x)cos(y),\ P=(\pi/3,-2\pi/3);u=(2,3)$$

(b)
$$f(x,y)=\sqrt{xyz},\ P=(2,-1,-2);u=(1,2,-2)$$

4 — Determine a derivada direcional máxima de f em P e a direção em que isto ocorre:

(a)
$$f(x,y)=3x^2+y^2+4z^2,\ P=(1,5,-2)$$

(b)
$$f(x,y)=\sqrt{xy^2z^3},\ P=(2,2,2)$$

5 — Suponha que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,2)=-5$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,2)=10$, onde $u=\left(\frac{3}{4},-\frac{4}{5}\right)$ e $v=\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$. Determine:

(a) $f_x(1,2)$

(b) $f_y(1,2)$

(c) a derivada direcional de f em $(1,2)$ na direção e sentido da origem.

6 — Determine f_{xx} , f_{xy}, f_{yx} e f_{yy} para cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x,y)=3x^2+2y^2$

(b) $f(x,y)=sen(x^2-3xy)$

(c) $f(x,y)=x^2y^2e^{2xy}$

7 — Seja

$$f(x,y)=\begin{cases} xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2) & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) Se $f(x,y)\neq(0,0)$ calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(b) Mostre que $(\partial f/\partial x)(0,0)=0=(\partial f/\partial y)(0,0)$.

(c) $(\partial^2 f/\partial x\partial y)(0,0)=1$ e $(\partial^2 f/\partial y\partial x)(0,0)=-1$

(d) O que aconteceu ? Porque as derivadas mistas não são iguais ?

8 — Dados $z=3xy-4y^2, x=2se^r, y=re^{-s}$.Determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial r}$ de duas maneiras:

(a) expressando z em termos de r e s;

(b) usando a regra da cadeia

9 — Uma função $w=f(x,y,z)$ com segundas derivadas parciais contínuas que satisfaz a *Equação de Laplace*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0,$$

é chamada *hârmonica* . Qual das funções abaixo são hârmonicas?

(a) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

(b) $f(x, y) = e^x sen(y) + e^y cos(y)$

(c) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

10 — Determine o maior conjunto aberto no qual $f_{xy} = f_{yx}$

(a) $f(x, y) = 4x^3y + 3x^2y$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

(c) $f(x, y) = sen(x^2 + y^2)$

11 — Se o *potencial elétrico* em um ponto (x, y) do plano *xy* é $V(x, y)$ então o it vetor campo elétrico no ponto (x,y) é $\mathbf{E} = \nabla V$. Suponha que $v(x, y) = e^{-2x}cos(2y)$.

(a) Determine o valor do campo elétrico em $(\pi/4, 0)$.

(b) Mostre que, em cada ponto no plano, o potencial elétrico decresce mais rapidamente na direção e sentido do vetor **E**.

12 — A equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde c é uma constante positiva, chamada it equação de onda. Sejam f e g funções diferenciáveis de uma variável.

(a) Mostre que $u(x, y) = f(x+ct)$ e $v(x, t) = g(x-ct)$ satisfazem a equação da onda.

(b) Mostre que uma função da forma $\phi(x, y) = f(x + ct) + g(x - ct)$ satisfaz a equação da onda.

(c) Confirme que $\phi(x, t) = sen(t)sen(x)$ satisfaz a equação da onda com $c = 1$, e então use identidades trigonométricas apropriadas para expressar essa função na forma $f(x, t) + g(x - t)$.

13 — O capitão Astro está outra vez em perigo perto da órbita de Mercúrio. Ele está na posição $P_0 = (1, 1, 1)$, e temperatura da blindagem de sua espaçonave num ponto (x, y, z) é dada por

$$T(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2} graus.$$

(a) Que direção ele deve tomar para perder temperatura o mais rápido possível?

(b) Se a espaço nave viaja a e^8 unidades de comprimento por segundo, com que taxa a temperatura irá cair quando ele seguir a direção do item (a)?

(c) Infelizmente , a blindagem da espaçonave se danificará se a taxa de variação da temperatura for inferior a $\sqrt{14}e^2$ graus/s. Que conjunto de possíveis direções ele pode tomar sem causar danos à sua espaçonave, a partir de P_0 , com velocidade do item (b)

14 — Se u e v são funções de x e y , de classe C^2, e satisfazem as equações de *Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} e \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

mostre que u e v são harmônicas.

Respostas dos Exercícios

1 (a)

$$\nabla f(-2,2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$$

(b)

$$\nabla f(-2,0) = (-4,0)$$

(c)

$$\nabla f(2,-1) = (4,2)$$

2 (a) $z(-z^2 + z + 2yz^2 - 4yz + 2y - 2) + x = 0$

(b) $x = 2 + t; y = -1; z = 1 + 3t$

3 (a) $Duf = \frac{-11}{4\sqrt{13}}$

(b) $Duf = \frac{-5}{6}$

4 (a) $Duf = \sqrt{392}$ ocorre na direção de ∇f .

(b) $Duf = \sqrt{56}$ ocorre na direção de ∇f .

5 (a) $f_x(1,2) = 5$

(b) $f_y(1,2) = 10$

(c) $u = (-1,-2)$, $D_u f(1,2) = -5\sqrt{5}$

6 (a) $f_{xx} = 6$; $f_{xy} = 0$; $f_{yx} = 0$; $f_{yy} = 4$

(b) $f_{xx} = 2\cos(x^2 - 3xy) - (4x^2 - 12xy + 9y^2)sen(x^2 - 3xy)$; $f_{xy} = -3\cos(x^2 - 3xy) - (6x^2 - 9xy)sen(x^2 - 3xy)$; $f_{yx} = -3\cos(x^2 - 3xy) - (6x^2 - 9xy)sen(x^2 - 3xy)$; $f_{yy} = -9sen(x^2 - 3xy)$;

(c) $f_{xx} = e^{2xy}(2y^2 + 8xy^3 + 4x^{x^2y^4})$; $f_{xy} = e^{2xy}(4xy + 10x^2y^2 + 4x^3y^3)$; $f_{yx} = e^{2xy}(4xy + 10x^2y^2 + 4x^3y^3)$; $f_{xy} = e^{2xy}(2x^2 + 8x^3y + 4y^2x^4)$;

7

8

9

10

11

12

13

14