Lista 4 – Funções de Várias Variáveis

Gradiente, Derivada Direcional e Derivadas Parciais de Ordem Superior

Exercícios marcados com asterisco (*) são desafios, com um grau mais alto de dificuldade.

1 — Esboçe a curva de nível de $f(x, y)$ passando pelo ponto P (i.e. a curva de nível $z = f(P)$) e desenhe o vetor gradiente em P:

a) $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$, $P = (-2, 2)$;

b) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, $P = (-2, 0)$;

c) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $P = (2, -1)$.

2 — Considere a superfície $xz - yz^3 + yz^2 = 2$

a) Determine a equação do plano tangente à superficie no ponto $(2, -1, 1)$.

b) Determine as equações parametricas da reta que é normal à superficie no ponto $(2, -1, 1)$.

3 — Determine a derivada direcional de f em P na direção do vetor $\vec{u}$:

a) $f(x, y) = sen(x)cos(y)$, $P = (\pi/3, -2\pi/3)$, $\vec{u} = (2, 3)$;

b) $f(x, y) = \sqrt{xyz}$, $P = (2, -1, -2)$, $u = (1, 2, -2)$.

* **4** — O objetivo deste exercício é demonstrar a *desigualdade de Cauchy-Schwarz:* dados dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \ ,$$

com igualdade se e somente se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem colineares (i.e. proporcionais). (lembrar que se $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$, então o produto escalar (canônico) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e a norma (Euclideana) $\|\vec{u}\|$ de $\vec{u}$ são respectivamente dados por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$ e $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$)

a) Mostre que $\|\vec{u} + t\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle t + \|\vec{v}\|^2 t^2$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$;

b) Mostre que se $\vec{v} \neq \vec{0}$, o polinômio de segundo grau $P(t)$ dado no item (a) possui no máximo *uma* raiz real, e que isso ocorre se e somente se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem colineares.

c) Conclua do item (b) a desigualdade de Cauchy-Schwartz no caso $\vec{v} \neq \vec{0}$. Por que ela permanece válida se $\vec{v} = \vec{0}$? Justifique.

d) Dado $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, seja $f : D \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\vec{x}_0 \in D$. Mostre que a direção ao longo da qual a derivada direcional de f em $\vec{x}_0$ é máxima é ao longo de $\nabla f(\vec{x}_0)$.

5 — Determine a derivada direcional máxima de f em P e a direção em que isto ocorre:

a) $f(x, y) = 3x^2 + y^2 + 4z^2$, $P = (1, 5, -2)$;

b) $f(x, y) = \sqrt{xy^2z^3}$, $P = (2, 2, 2)$.

6 — Suponha que a função de duas variáveis f, diferenciável no ponto $(1, 2)$, satisfaz $D_{\vec{u}}f(1, 2) = -5$ e $D_{\vec{v}}f(1, 2) = 10$, onde $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ e $\vec{v} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$. Determine:

a) $f_x(1, 2)$;

b) $f_y(1, 2)$;

c) A derivada direcional de f em $(1, 2)$ ao longo do vetor dado pelo segmento de reta orientado com ponto inicial $(1, 2)$ e ponto final dado pela origem.

7 — Determine f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} e f_{yy} para cada uma das seguintes funções:

a) $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$;

b) $f(x, y) = sen(x^2 - 3xy)$;

c) $f(x, y) = x^2y^2e^{2xy}$.

8 — Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Se $(x, y) \neq (0, 0)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$;

b) Mostre que $(\partial f/\partial x)(0, 0) = 0 = (\partial f/\partial y)(0, 0)$;

c) Mostre que $(\partial^2 f/\partial x\partial y)(0,0) = 1$ e $(\partial^2 f/\partial y\partial x)(0,0) = -1$;

d) O que aconteceu? Porque as derivadas mistas não são iguais?

9 — Sejam $z = 3xy - 4y^2$, $x = 2se^r$, $y = re^{-s}$. Determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial r}$ de duas maneiras:

a) Expressando z em termos de r e s;

b) Usando a regra da cadeia.

10 — Uma função $w = f(x,y,z)$ com segundas derivadas parciais contínuas que satisfaz a *Equação de Laplace*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

é dita *harmônica*. Qual das funções abaixo são harmônicas?

a) $f(x,y,z) = g(x,y) = x^3 - 3xy^2$;

b) $f(x,y,z) = g(x,y) = e^x \mathrm{sen}(y) + e^y \cos(y)$;

c) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.

11 — Determine o maior conjunto aberto no qual $f_{xy} = f_{yx}$ nos seguintes casos:

a) $f(x,y) = 4x^3y + 3x^2y$;

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$;

c) $f(x,y) = \mathrm{sen}(x^2 + y^2)$.

12 — Se o *potencial elétrico* em um ponto (x,y) do plano xy é $V(x,y)$ então o *vetor campo elétrico* no ponto (x,y) é $\vec{E} = \nabla V$. Suponha que $V(x,y) = e^{-2x}\cos(2y)$.

a) Determine o valor do campo elétrico em $(\pi/4, 0)$.

b) Mostre que, em cada ponto no plano, o potencial elétrico decresce mais rapidamente na direção e sentido do vetor $\vec{E}$.

13 — A equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, ,$$

onde c é uma constante positiva, é chamada *equação de onda*. Sejam f e g funções duas vezes diferenciáveis de uma variável.

a) Mostre que $u(x,t) = f(x+ct)$ e $v(x,t) = g(x-ct)$ satisfazem a equação da onda.

b) Mostre que uma função da forma $\phi(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ satisfaz a equação da onda.

c) Confirme que $\phi(x,t) = \mathrm{sen}(t)\mathrm{sen}(x)$ satisfaz a equação da onda com $c = 1$, e então use identidades trigonométricas apropriadas para expressar essa função na forma $f(x+t) + g(x-t)$.

14 — O capitão Astro está outra vez em perigo perto da órbita de Mercúrio. Ele está na posição $P_0 = (1,1,1)$, e a temperatura da blindagem de sua espaçonave num ponto (x,y,z) é dada por $T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$ graus.

a) Que direção ele deve tomar para perder temperatura o mais rápido possível?

b) Se a espaço nave viaja a e^8 unidades de comprimento por segundo, com que taxa a temperatura irá cair quando ele seguir a direção do item (a)?

c) Infelizmente, a blindagem da espaçonave se danificará se a taxa de variação da temperatura for inferior a $\sqrt{14}e^2$ graus/s. Que conjunto de possíveis direções ele pode tomar sem causar danos à sua espaçonave, a partir de P_0, com a velocidade do item (b)?

15 — Se u e v são funções das variáveis x e y de classe C^2, e satisfazem as *equações de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \, , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \, ,$$

mostre que u e v são harmônicas.

Respostas dos Exercícios

1 a) $\nabla f(-2,2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

b) $\nabla f(-2,0) = (-4,0)$

c) $\nabla f(2,-1) = (4,2)$

2 a) $x + 3z = 5$

b) $x = 2 + t$; $y = -1$; $z = 1 + 3t$

3 a) $D_{\vec{u}} f(P) = \frac{-11}{4\sqrt{13}}$

b) $D_{\vec{u}} f(P) = \frac{-5}{6}$

4 a) Use as propriedades $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ e $\langle \vec{u} + t\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + t\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ do produto escalar.

c) Calcule o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ de $P(t) = at^2 + bt + c$ quando $\vec{v} \neq 0$, e os dois lados da desigualdade de Cauchy-Schwarz quando $\vec{v} = \vec{0}$.

5 a) $D_{\vec{u}} f = \sqrt{392}$ ocorre na direção de ∇f.

b) $D_{\vec{u}} f = \sqrt{56}$ ocorre na direção de ∇f.

6 a) $f_x(1,2) = 5$

b) $f_y(1,2) = 10$

c) $\vec{u} = (-1,-2)$, $D_{\vec{u}} f(1,2) = -5\sqrt{5}$

7 a) $f_{xx} = 6$, $f_{xy} = 0$, $f_{yx} = 0$, $f_{yy} = 4$

b) $f_{xx} = 2\cos(x^2-3xy) - (4x^2-12xy+9y^2)\operatorname{sen}(x^2-3xy)$, $f_{xy} = -3\cos(x^2-3xy) - (6x^2-9xy)\operatorname{sen}(x^2-3xy)$, $f_{yx} = -3\cos(x^2-3xy) - (6x^2-9xy)\operatorname{sen}(x^2-3xy)$, $f_{yy} = -9\operatorname{sen}(x^2-3xy)$

c) $f_{xx} = e^{2xy}(2y^2+8xy^3+4x^2y^4)$, $f_{xy} = e^{2xy}(4xy+10x^2y^2+4x^3y^3)$, $f_{yx} = e^{2xy}(4xy+10x^2y^2+4x^3y^3)$, $f_{xy} = e^{2xy}(2x^2+8x^3y+4y^2x^4)$

8

9

10

11

12

13

14

15