

## Lista 1 – Funções de Várias Variáveis

## Domínios, Gráficos e Curvas de Nível

1 — Nos seguintes exercícios, (i) encontre o domínio  $\text{Dom } f$ , (ii) encontre a imagem  $\text{Im } f$ , e (iii) descreva as curvas de nível da função:

- $f(x, y) = x^2 - y^2$
- $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$
- $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$
- $f(x, y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$
- $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
- $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

2 — Esboce o gráfico das funções a seguir:

- $f(x, y) = 3$ ;
- $f(x, y) = y$ ;
- $f(x, y) = 1 - x - y$ ;
- $f(x, y) = \cos(x)$ ;
- $f(x, y) = 1 - x^2$ ;
- $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ ;
- $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$ ;
- $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$ ;
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

3 — Considere as funções:

- $f(x, y) = x + y$ . Para quais valores de  $x$  e  $y$  temos  $f(x, y) = 2$ ? Represente graficamente a resposta.
- $f(x, y) = 2^{x+y}$ . Para quais valores de  $x$  e  $y$  temos  $f(x, y) = 1$ ? Represente graficamente a resposta.
- $f(x, y) = xy$ . Para quais valores de  $x$  e  $y$  temos  $f(x, y) = 1$ ? Represente graficamente a resposta.

4 — Desenhe as curvas de nível  $f^{-1}(k) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = k\}$  das funções de duas variáveis  $f$  a seguir para os valores de  $k$  dados:

- $f(x, y) = x^2 - y^2$ ;  $k = 0, 1, 2, 3$ ;
- $f(x, y) = y^2 - x^2$ ;  $k = 0, 1, 2, 3$ ;
- $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $k = 0, 1, 2, 3$ ;
- $f(x, y) = |x| + |y|$ ;  $k = 1, 2, 4$ .

5 — Uma camada fina de metal, localizada no plano  $xy$ , tem temperatura  $T(x, y)$  no ponto  $(x, y)$ . As curvas de nível de  $T$  são chamadas de *isotérmicas* porque todos os pontos em uma isotérmica têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função de temperatura for dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}.$$

6 — Se  $V(x, y)$  é o potencial elétrico de um ponto  $(x, y)$  do plano  $xy$ , as curvas de nível de  $V$  são chamadas *curvas equipotenciais*, porque nelas todos os pontos têm o mesmo potencial elétrico. Esboce algumas curvas equipotenciais de

$$V(x, y) = \frac{c}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

onde  $c$  é uma constante positiva.

7 — Dada a função  $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ , pede-se:

- As equações das curvas de nível  $z = 1/4$ ,  $z = 4$  e  $z = 9$ .
- A equação e o esboço da curva de nível que contém o ponto  $(0, 2)$ .
- Um esboço do gráfico da função.

8 — Seja  $f(x, y) = \sqrt{10 - x - y^2}$ .

- Represente o domínio de  $f$  no plano  $xy$  e determine a imagem de  $f$ .
- Identifique as interseções do gráfico de  $f$  com os planos  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $z = 2$ ,  $y = 0$  e  $x = 0$ .
- Faça um esboço do gráfico de  $f$ .

9 — Associe a função (i) com seu gráfico (indicado por A-F na Figura 1) e (ii) com suas respectivas curvas de nível (indicado por I-VI na Figura 2).<sup>1</sup>

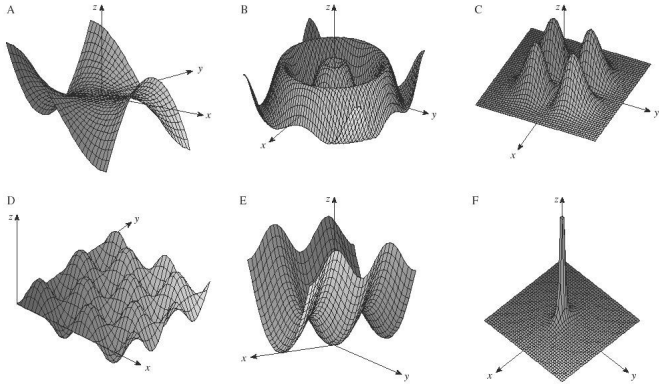


Figura 1

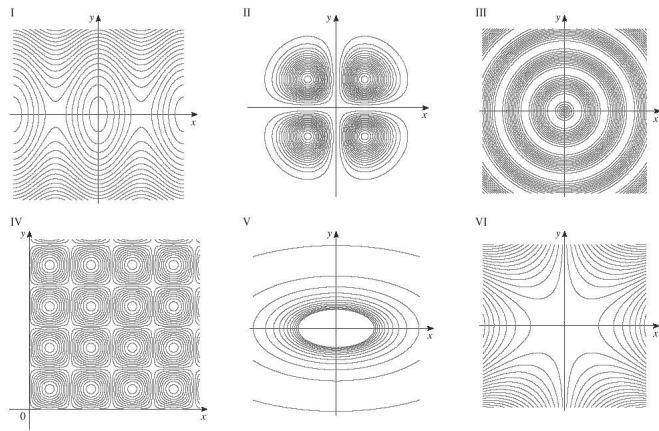


Figura 2

- a)  $z = \text{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})$
- b)  $z = x^2y^2e^{-x^2-y^2}$
- c)  $z = \frac{1}{x^2+4y^2}$
- d)  $z = x^3 - 3xy^2$
- e)  $z = \text{sen}(x)\text{sen}(y)$
- f)  $z = \text{sen}^2(x) + \frac{1}{4}y^2$

10 — Na Figura 3 são mostradas curvas de nível para a função  $f$ . Use-as para estimar o valor de  $f(-3, 3)$  e  $f(3, -2)$ . O que você pode dizer sobre a forma do gráfico de  $f(x, y)$ ?

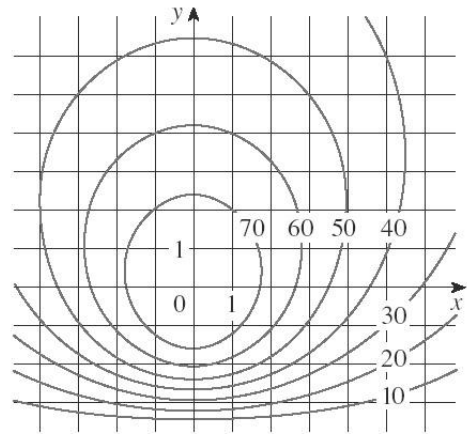


Figura 3

<sup>1</sup>Fonte das figuras: J. Stewart, *Cálculo*, 5a. edição, vol. 2, pág. 899. Cengage Learning, 2006.

## Respostas dos Exercícios

1 a)  $\text{Dom } f = \mathbb{R}^2$ ,  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ , curvas de nível:  $x^2 - y^2 = k$

b)  $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$ ,  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ , curvas de nível:  $y = kx^2$

c)  $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 16\}$ ,  $\text{Im } f = [1/4, +\infty)$ , curvas de nível:  $k^2 = \frac{1}{16 - x^2 - y^2}$ ,  $k \neq 0$

d)  $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geq 9\}$ ,  $\text{Im } f = [0, 3]$ , curvas de nível:  $x^2 + y^2 = 9 - k^2$

e)  $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 0\}$ ,  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ , curvas de nível:  $x^2 + y^2 = e^k$

f)  $\text{Dom } f = \mathbb{R}^2$ ,  $\text{Im } f = (0, 1]$ , curvas de nível:  $x^2 + y^2 = -\ln k$

2

3

4

5 Curvas de nível:

$$\frac{x^2}{(100 - k)/k} + \frac{y^2}{(100 - k)/2k} = 1$$

6 Curvas de nível:  $x^2 + y^2 = r^2 - \frac{c^2}{k^2}$

7 a)  $z = \frac{1}{4} : x^2 + y^2 = 4$  ;  $z = 4 : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  ;  
 $z = 9 : x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$

b)  $z = \frac{1}{4}$

8 a)  $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 10 - y^2\}$ ;  $\text{Im } f = [0, \infty)$

b)  $z = 0 : x = 10 - y^2$ ;  $z = 1 : x = 9 - y^2$ ;  
 $z = 2 : x = 8 - y^2$ ,  $y = 0 : x = 10 - z^2$ ,  
 $x = 0 : z^2 + y^2 = 10$

9 a) B(III)

b) C(II)

c) F(V)

d) A(VI)

e) D(IV)

f) E(I)

10  $f(-3, 3) \approx 55$ ;  $f(3, -2) \approx 35$