Lista 2 – Funções de Várias Variáveis

Limites e Continuidade

Exercícios marcados com asterisco (*) são desafios, com um grau mais alto de dificuldade.

1 — Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe (justifique!):

a)
$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} (x^3y + x^2y^3 + 4)$$

b)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1}$$

c)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+2}$$

d)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$$

e)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

f)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{x^2+y^2}$$

g)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x) - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^4+y^4}$$

h)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

i)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \operatorname{tg}(x)}{x^2+y^2}$$

j)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{xy+x}$$

k)
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sqrt[3]{xy}-1}{\sqrt{xy}-1}$$

l)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

2 —

a) Mostre que o valor de $\frac{x^3y}{2x^6+y^2}$ tende a 0 quando (x, y) tende a $(0, 0)$ ao longo de qualquer reta $y = mx$, ou ao longo de qualquer parábola $y = kx^2$.

b) Mostre que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^6+y^2}$$
não existe, tomando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo da curva $y = x^3$.

3 — Utilize coordenadas polares para determinar os limites (*Dica:* note que se (r, θ) são as coordenadas polares do ponto (x, y)

$$\begin{matrix} x = r\cos(\theta) \\ y = r\operatorname{sen}(\theta) \end{matrix}, \quad r \geq 0 \ , \ \theta \in [0, 2\pi) \ ,$$

então $r \to 0+$ quando $(x, y) \to (0, 0)$, pois $x^2 + y^2 = r^2$):

a)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

b)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

c)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-1/(x^2+y^2)}$$

d)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

4 — Esboce o maior conjunto no qual a função é contínua:

a) $f(x,y) = y\ln(1+x)$

b) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$

c) $f(x,y) = \frac{x^2y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$

d) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-4)$

e) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(xy)$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

5 — Encontre o valor de a para que a função dada seja contínua em $(0,0)$:

a) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right) & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ a & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{\sqrt{y^2+1}-1} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ a-4 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2\operatorname{sen}(x)\cos(y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ a^2-4a-5 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

6 — Existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(2x)-2x+y}{x^3+y}$? Justifique sua resposta!

7 — Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy} = 1$.

8 — É possível definir a função $\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$ no ponto $(0,0)$ de tal modo que ela seja contínua? Justifique!

9 — Idem para a função $\frac{xy}{x^2+y^2}$.

10 — Calcule
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)-2xh-k}{\sqrt{h^2+k^2}},$$
onde $f(x,y) = x^2+y$.

11 — Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$. Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

12 — Seja $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

a) Verifique que as curvas $y = \operatorname{tg}(a)x$, com $a \in (-\pi/2,\pi/2)$, são curvas de nível de f.

b) É possível definir f na origem de modo a torná-la contínua? Justifique.

* **13** — Denotamos por
$$B_r(x_0,y_0) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < r^2\}$$
o disco aberto de raio $r \geq 0$ centrado no ponto (x_0,y_0). Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 1$, onde $D = B_1(0,0)\cup\{(1,0)\}$. Mostre, usando a definição de limite, que
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 1 .$$

Respostas dos Exercícios

1 a) -8

b) 1

c) 0

d) Não existe

e) Não existe

f) Não existe

g) Não existe

h) 0

i) 0

j) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

k) $\frac{2}{3}$

l) 0

2

3 a) 0

b) 0

c) 0

d) 0

4 a) $\mathrm{Dom}\, f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > -1\}$

b) $\mathrm{Dom}\, f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq y\}$

c) $\mathrm{Dom}\, f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 25\}$

d) $\mathrm{Dom}\, f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 4\}$

e) $\mathrm{Dom}\, f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq xy \leq 1\}$

f) Contínua para todo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \neq (0, 0)\}$

5 a) $a = 0$

b) $a = 4$

c) $a = -1$ ou $a = 5$

6 Não.

7

8 Sim. O limite em $(0, 0)$ vale 1. (por quê?)

9 Não.

10 O limite vale 0.

11

12

13