Lista 3 – Funções de Várias Variáveis

Diferenciabilidade

1 — Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ para as seguintes funções de duas variáveis:

a) $f(x,y) = x\cos(x)\cos(y)$

b) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

c) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$

d) $f(x,y) = x^y$

e) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3+3}$

f) $f(x,y) = \frac{x\,\mathrm{sen}(y)}{\cos(x^2+y^2)}$

2 — Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, e $\frac{\partial f}{\partial z}$ para as seguintes funções de três variáveis:

a) $f(x,y,z) = x^2y - 3xy^2 + 2yz$

b) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{-1}{2}}$

c) $f(x,y,z) = ye^x\mathrm{sen}(xz)$

3 — Encontre as derivadas parciais indicadas.

a) $z = \ln\sqrt{1+xy}$; $\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$

b) $z = e^{ax}\cos(bx+y)$; $z_y(2\pi/b, 0)$

4 — Seja $f(x,y) = (x^2+y^2)^{2/3}$. Mostre que

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{4x}{3(x^2+y^2)^{1/3}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5 — Verifique se as funções abaixo são diferenciáveis em $(0,0)$:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = x^{1/3}\cos(y)$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

6 — Encontre o ponto onde o plano tangente à superfície de equação $z = e^{x-y}$ no ponto $(1,1,1)$ corta o eixo z.

7 — Determine a aproximação linear da função $f(x,y) = \sqrt{20-x^2-7y^2}$ em $(2,1)$, e use-a para calcular aproximadamente $f(1.95, 1.08)$.

8 — Encontre uma aproximação linear para:

a) $(0,99e^{0,02})^8$

b) $(0,99)^3 + (2,01)^3 - 6(0,99)(2,01)$

c) $\sqrt{(4,01)^2 + (3,98)^2 + (2,02)^2}$

9 — Sejam $z = ye^x + xe^y$, $y = \mathrm{sen}(t)$, $x = \cos(t)$. Determine $\frac{dz}{dt}$ de dois modos:

a) Usando a regra da cadeia;

b) Determinando a função composta $z(t)$ e derivando em relação a t.

10 — Suponha que $z = f(x,y)$ seja diferenciável no ponto $(4,8)$ com $f_x(4,8) = 3$ e $f_y(4,8) = -1$. Se $x = t^2$ e $y = t^3$, encontre $\frac{dz}{dt}$ para $t = 2$.

11 — Sejam $\varphi(x,y) = x^2y - xy^3 + 2$; $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$. Encontre $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$.

12 — Sejam $f(x,y) = x^2y^2 - x + 2y$; $x = \sqrt{u}$, $y = uv^3$. Encontre

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u=1,v=-2} \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{u=1,v=-2}.$$

13 — Seja f uma função diferenciável de uma variável e seja $z = f(x^2+y^2)$. Mostre que $yz_x - xz_y = 0$.

14 — Seja f uma função de uma variável e seja $w = f(u)$, em que $u = x + 2y + 3z$. Mostre que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 6\frac{dw}{du} .$$

15 — Seja $z = f(x-y, y-x)$. Mostre que $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

16 — Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\phi'(1) = 4$. Seja $g(x, y) = \phi(\frac{x}{y})$. Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$.

17 — Determine uma função $f(x, y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 6y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \frac{y}{y^2+1}$.

18 — A função $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$ se para todo $x \in \operatorname{Dom} f$ temos $F(x, f(x)) = 0$. Mostre que se f e F são diferenciáveis, então:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} \text{ se } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 .$$

19 — Seja $z = f(x, y)$ definida implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$ para todo $(x, y) \in \operatorname{Dom} f$. Mostre que se f e F são diferenciáveis, então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} \text{ se } \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 .$$

20 — Use o exercício anterior para determinar a equação do plano tangente no ponto $(1, 3, 2)$ à superfície definida implicitamente pela equação

$$F(x, y, z) = z^3 + (x + y)z^2 + x^2 + y^2 = 34 .$$

Respostas dos Exercícios

1 a)

$$f_x = \cos(x)\cos(y) - x\mathrm{sen}(x)\cos(y)$$
$$f_y = -x\cos(x)\,\mathrm{sen}(y)$$

b)

$$f_x = 2x[1 + \ln(x^2 + y^2)]$$
$$f_y = 2y[1 + \ln(x^2 + y^2)]$$

c)

$$f_x = \frac{y}{x^2 + y^2}$$
$$f_y = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

d)

$$f_x = yx^{y-1}$$
$$f_y = x^y \ln(x)$$

e)

$$f_x = x^2(x^3 + y^3 + 3)^{\frac{-2}{3}}$$
$$f_y = y^2(x^3 + y^3 + 3)^{\frac{-2}{3}}$$

f)

$$f_x = \frac{\mathrm{sen}(y)(\cos(x^2 + y^2) + 2x^2\mathrm{sen}(x^2 + y^2))}{\cos^2(x^2 + y^2)}$$
$$f_y = \frac{x\cos(y)\cos(x^2 + y^2) + 2xy\mathrm{sen}(y)\mathrm{sen}(x^2 + y^2)}{\cos^2(x^2 + y^2)}$$

2 a)

b)

$$f_x = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$
$$f_y = \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$
$$f_z = \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

c)

$$f_x = y \exp x\mathrm{sen}(xz) + yz \exp x\cos(xz)$$
$$f_y = \exp x\mathrm{sen}(xz)$$
$$f_z = xy \exp x\cos(xz)$$

3 a)

$$z_x(1, 2) = \frac{1}{3}\,, z_y(0, 0) = 0$$

b)

$$z_y(\frac{2\pi}{b}, 0) = 0$$

4

5 a) Não é diferenciável

b) Não é diferenciável

c) Diferenciável

d) Não Diferenciável

6 $P = (0, 0, 1)$

7

8 a) $\approx 1,08$

b) $\approx -2,85$

c) $\approx 6,0066$

9

10

11

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 3r^2\cos^2(\theta)\mathrm{sen}(\theta) - 4r^3\cos(\theta)\mathrm{sen}^3(\theta)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = r^3(r\mathrm{sen}^4(\theta) - 2\cos(\theta)\mathrm{sen}^2(\theta) + \cos^3(\theta) - 3r\cos^2(\theta)\mathrm{sen}^2(\theta))$$

12

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u=1,v=-2} = \frac{351}{2}$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{u=1,v=-2} = -168$$

13

14

15

16

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 4\ ,\ \frac{\partial g}{\partial y} = -4$$

17

18

19

20