

Lista 4 – Funções de Várias Variáveis

Gradiente, Derivada Direcional e Derivadas Parciais de Ordem Superior

Exercícios marcados com asterisco (*) são desafios, com um grau mais alto de dificuldade.

1 — Esboce a curva de nível de $f(x, y)$ passando pelo ponto P (i.e. a curva de nível $z = f(P)$) e desenhe o vetor gradiente em P :

- $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$, $P = (-2, 2)$;
- $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, $P = (-2, 0)$;
- $f(x, y) = x^2 - y^2$, $P = (2, -1)$.

2 — Considere a superfície $xz - yz^3 + yz^2 = 2$

- Determine a equação do plano tangente à superfície no ponto $(2, -1, 1)$.
- Determine as equações paramétricas da reta que é normal à superfície no ponto $(2, -1, 1)$.

3 — Determine a derivada direcional de f em P na direção do vetor \vec{u} :

- $f(x, y) = \text{sen}(x)\cos(y)$, $P = (\pi/3, -2\pi/3)$, $\vec{u} = (2, 3)$;
- $f(x, y) = \sqrt{xyz}$, $P = (2, -1, -2)$, $\vec{u} = (1, 2, -2)$.

* **4** — O objetivo deste exercício é demonstrar a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*: dados dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|,$$

com igualdade se e somente se \vec{u} e \vec{v} forem colineares (i.e. proporcionais). (lembrar que se $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$, então o produto escalar (canônico) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ de \vec{u} e \vec{v} e a norma (Euclideana) $\|\vec{u}\|$ de \vec{u} são respectivamente dados por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$ e $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$)

- Mostre que $\|\vec{u} + t\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle t + \|\vec{v}\|^2 t^2$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$;
- Mostre que se $\vec{v} \neq \vec{0}$, o polinômio de segundo grau $P(t)$ dado no item (a) possui no máximo *uma* raiz real, e que isso ocorre se e somente se \vec{u} e \vec{v} forem colineares.

c) Conclua do item (b) a desigualdade de Cauchy-Schwartz no caso $\vec{v} \neq \vec{0}$. Por que ela permanece válida se $\vec{v} = \vec{0}$? Justifique.

d) Dado $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $\vec{x}_0 \in D$. Mostre que a direção ao longo da qual a derivada direcional de f em \vec{x}_0 é máxima é ao longo de $\nabla f(\vec{x}_0)$.

5 — Determine a derivada direcional máxima de f em P e a direção em que isto ocorre:

- $f(x, y) = 3x^2 + y^2 + 4z^2$, $P = (1, 5, -2)$;
- $f(x, y, z) = \sqrt{xy^2z^3}$, $P = (2, 2, 2)$.

6 — Suponha que a função de duas variáveis f , diferenciável no ponto $(1, 2)$, satisfaz $D_{\vec{u}}f(1, 2) = -5$ e $D_{\vec{v}}f(1, 2) = 10$, onde $\vec{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $\vec{v} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$. Determine:

- $f_x(1, 2)$;
- $f_y(1, 2)$;
- A derivada direcional de f em $(1, 2)$ ao longo do vetor dado pelo segmento de reta orientado com ponto inicial $(1, 2)$ e ponto final dado pela origem.

7 — Determine f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} e f_{yy} para cada uma das seguintes funções:

- $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$;
- $f(x, y) = \text{sen}(x^2 - 3xy)$;
- $f(x, y) = x^2y^2e^{2xy}$.

8 — Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Se $(x, y) \neq (0, 0)$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$;
- Mostre que $(\partial f / \partial x)(0, 0) = 0 = (\partial f / \partial y)(0, 0)$;

c) Mostre que $(\partial^2 f / \partial x \partial y)(0, 0) = 1$ e $(\partial^2 f / \partial y \partial x)(0, 0) = -1$;

d) O que aconteceu? Porque as derivadas mistas não são iguais?

9 — Sejam $z = 3xy - 4y^2$, $x = 2se^r$, $y = re^{-s}$.

Determine $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial r}$ de duas maneiras:

- Expressando z em termos de r e s ;
- Usando a regra da cadeia.

10 — Uma função $w = f(x, y, z)$ com segundas derivadas parciais contínuas que satisfaz a *Equação de Laplace*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

é dita *harmônica*. Qual das funções abaixo são harmônicas?

- $f(x, y, z) = g(x, y) = x^3 - 3xy^2$;
- $f(x, y, z) = g(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y) + e^y \cos(y)$;
- $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.

11 — Determine o maior conjunto aberto no qual $f_{xy} = f_{yx}$ nos seguintes casos:

- $f(x, y) = 4x^3y + 3x^2y$;
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$;
- $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$.

12 — Se o *potencial elétrico* em um ponto (x, y) do plano xy é $V(x, y)$ então o *vetor campo elétrico* no ponto (x, y) é $\vec{E} = \nabla V$. Suponha que $V(x, y) = e^{-2x} \cos(2y)$.

- Determine o valor do campo elétrico em $(\pi/4, 0)$.
- Mostre que, em cada ponto no plano, o potencial elétrico decresce mais rapidamente na direção e sentido do vetor \vec{E} .

13 — A equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde c é uma constante positiva, é chamada *equação de onda*. Sejam f e g funções duas vezes diferenciáveis de uma variável.

- Mostre que $u(x, t) = f(x + ct)$ e $v(x, t) = g(x - ct)$ satisfazem a equação da onda.
- Mostre que uma função da forma $\phi(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ satisfaz a equação da onda.
- Confirme que $\phi(x, t) = \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(x)$ satisfaz a equação da onda com $c = 1$, e então use identidades trigonométricas apropriadas para expressar essa função na forma $f(x + t) + g(x - t)$.

14 — O capitão Astro está outra vez em perigo perto da órbita de Mercúrio. Ele está na posição $P_0 = (1, 1, 1)$, e a temperatura da blindagem de sua espaçonave num ponto (x, y, z) é dada por $T(x, y, z) = e^{-x^2 - 2y^2 - 3z^2}$ graus.

- Que direção ele deve tomar para perder temperatura o mais rápido possível?
- Se a espaçonave viaja a e^8 unidades de comprimento por segundo, com que taxa a temperatura irá cair quando ele seguir a direção do item (a)?
- Infelizmente, a blindagem da espaçonave se danificará se a taxa de variação da temperatura for inferior a $\sqrt{14}e^2$ graus/s. Que conjunto de possíveis direções ele pode tomar sem causar danos à sua espaçonave, a partir de P_0 , com a velocidade do item (b)?

15 — Se u e v são funções das variáveis x e y de classe C^2 , e satisfazem as *equações de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

mostre que u e v são harmônicas.

Respostas dos Exercícios

- 1** a) $\nabla f(-2, 2) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$
 b) $\nabla f(-2, 0) = (-4, 0)$
 c) $\nabla f(2, -1) = (4, 2)$
- 2** a) $x + 3z = 5$
 b) $x = 2 + t; y = -1; z = 1 + 3t$
- 3** a) $D_{\vec{u}}f(P) = \frac{7}{4\sqrt{13}}$
 b) $D_{\vec{u}}f(P) = \frac{-1}{6}$
- 4** a) Use as propriedades $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ e $\langle \vec{u} + t\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + t\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ do produto escalar.
 c) Calcule o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ de $P(t) = at^2 + bt + c$ quando $\vec{v} \neq 0$, e os dois lados da desigualdade de Cauchy-Schwarz quando $\vec{v} = \vec{0}$.
- 5** a) $D_{\vec{u}}f = \sqrt{392}$ ocorre na direção de ∇f .
 b) $D_{\vec{u}}f = \sqrt{56}$ ocorre na direção de ∇f .
- 6** a) $f_x(1, 2) = 5$
 b) $f_y(1, 2) = -10$
 c) $\vec{u} = (-1, -2), D_{\vec{u}}f(1, 2) = -3\sqrt{5}$
- 7** a) $f_{xx} = 6, f_{xy} = 0, f_{yx} = 0, f_{yy} = 4$
 b) $f_{xx} = 2\cos(x^2 - 3xy) - (4x^2 - 12xy + 9y^2)\text{sen}(x^2 - 3xy), f_{xy} = -3\cos(x^2 - 3xy) + (6x^2 - 9xy)\text{sen}(x^2 - 3xy), f_{yx} = -3\cos(x^2 - 3xy) + (6x^2 - 9xy)\text{sen}(x^2 - 3xy), f_{yy} = -9x^2\text{sen}(x^2 - 3xy)$
 c) $f_{xx} = e^{2xy}(2y^2 + 8xy^3 + 4x^2y^4), f_{xy} = e^{2xy}(4xy + 10x^2y^2 + 4x^3y^3), f_{yx} = e^{2xy}(4xy + 10x^2y^2 + 4x^3y^3), f_{yy} = e^{2xy}(2x^2 + 8x^3y + 4y^2x^4)$
- 8**
9
10
11
12
13
14
15