UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 1 - Funções de Várias Variáveis

Domínios, Gráficos e Curvas de Nível

1 — Nos seguintes exercícios, (i) encontre o domínio, (ii) encontre a imagem, e (iii) descreva as curvas de nível da função:

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$

(b) $f(x,y) = \frac{y}{x^2}$

(c) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

(d) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$

(e) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

(f) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

2 — Esboçe o gráfico das funções a seguir:

(a) $f(x,y) = 3$

(b) $f(x,y) = y$

(c) $f(x,y) = 1 - x - y$

(d) $f(x,y) = \cos(x)$

(e) $f(x,y) = 1 - x^2$

(f) $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2$

(g) $f(x,y) = 4x^2 + y^2 + 1$

(h) $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$

(i) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

3 — Considere as funções:

(a) $f(x,y) = x + y$. Para que valroes de x e y tem-se $f(x,y) = 2$? Represente graficamente a resposta.

(b) $f(x,y) = 2^{x+y}$. Para que valores de x e y tem-se $f(x,y) = 1$? Represente graficamente a resposta.

(c) $f(x,y) = xy$. Para que valores de x e y tem-se $f(x,y) = 1$? Represente graficamente a resposta.

4 — Desenhe as curvas de nível C_k para os valores de k dados:

(a) $z = x^2 - y^2$; $k = 0, 1, 2, 3$.

(b) $z = y^2 - x^2$; $k = 0, 1, 2, 3$.

(c) $z = \frac{1}{2}\ln\sqrt{x^2+y^2}$; $k = 0, 1, 2, 3$.

(d) $f(x,y) = |x| + |y|$; $k = 1, 2, 4$

5 — Uma camada fina de metal, localizada no plano xy, tem temperatura $T(x,y)$ no ponto (x,y). As curvas de nível de T são chamadas de isotérmicas por que todos os pontos em uma isotérmica têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função de temperatura for dada por

$$T(x,y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}\,.$$

6 — Se $V(x,y)$ é o potencial elétrico de um ponto (x,y) do plano xy, as curvas de nível de V são chamadas *curvas equipotenciais*, porque nelas todos os pontos têm o mesmo potencial elétrico. Esboçe algumas curvas equipotenciais de

$$V(x,y) = \frac{c}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

onde c é uma constante positiva.

7 — Dada a função $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, pede-se:

(a) As equações das curvas de nível $z = 1/4$, $z = 4$ e $z = 9$.

(b) A equação e o esboço da curva de nível que contém o ponto $(0,2)$.

(c) Um esboço do gráfico da função.

8 — Seja $f(x,y) = \sqrt{10 - x - y^2}$.

(a) Represente o domínio de f no plano xy e determine a imagem de f.

(b) Identifique as interseções do gráfico de f com os planos $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$, $y = 0$ e $x = 0$.

(c) Faça um esboço do gráfico de f.

9 — Associe a função (a) com seu gráfico (indicado por A-F na figura 1) e (b) com suas respectivas curvas de nível (indicado por I-VI na figura 2)[1].

(a) $z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$

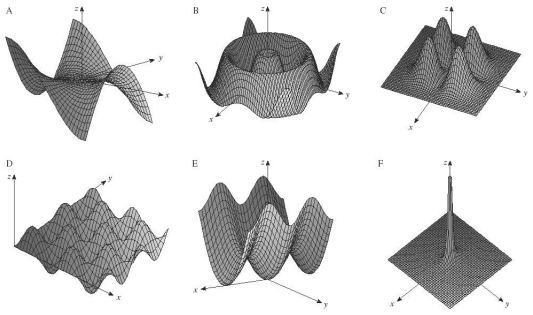
(b) $z = x^2 y^2 e^{-x^2 - y^2}$

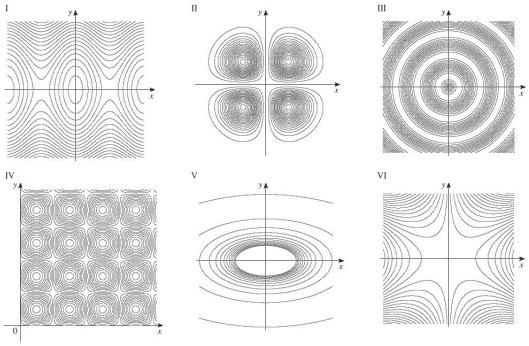
(c) $\frac{1}{x^2 + 4y^2}$

(d) $z = x^3 - 3xy^2$

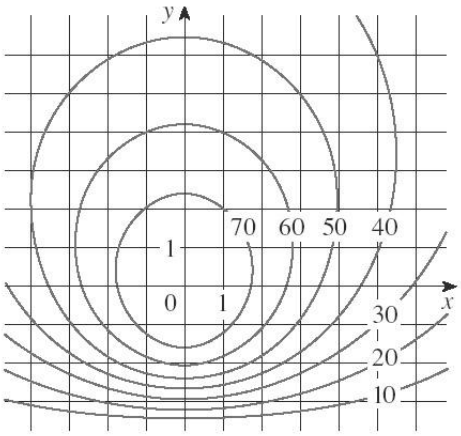
(e) $z = \sin(x)\sin(y)$

(f) $z = \sin^2(x) + \frac{1}{4}y^2$





10 — Na Figura 3 são mostradas curvas de nível para a função f. Use-ase para estimar o valor de $f(-3, 3)$ e $f(3, -2)$. O que você pode dizer sobre a forma do gráfico de $f(x, y)$?



[1]Fonte das figuras: Cálculo, Stewart, 5a edição, vol 2, pág. 899, Cengage Learning

Respostas dos Exercícios

1 (a) $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$, curvas de nível: $x^2 - y^2 = k$

(b) $\mathrm{Dom} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$, $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$, curvas de nível: $y = kx^2$

(c) $\mathrm{Dom} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 16\}$, $\mathrm{Im} f = [1/4, \infty)$, curvas de nível: $k^2 = \frac{1}{16 - x^2 - y^2}$, $k \neq 0$

(d) $\mathrm{Dom} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 9\}$, $\mathrm{Im} f = [0, 3]$, curvas de nível: $x^2 + y^2 = 9 - k^2$

(e) $\mathrm{Dom} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 0\}$, $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$, curvas de nível: $x^2 + y^2 = e^k$

(f) $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im} f = (0, 1]$, curvas de nivel: $x^2 + y^2 = -\ln k$

2

3

4

5 Curvas de nível:

$$\frac{x^2}{(200 - 2k)/k} + \frac{y^2}{(100 - k)/k} = 1$$

6 Curvas de nível: $x^2 + y^2 = r^2 - \frac{c^2}{k^2}$

7 (a) $z = \frac{1}{4} : x^2 + y^2 = 4$; $z = 4 : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$; $z = 9 : x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$

(b) $z = \frac{1}{4}$

8 (a) $\mathrm{Dom} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 10 - y^2\}$; $\mathrm{Im} f = [0, \infty)$

(b) $z = 0 : x = 10 - y^2$; $z = 1 : x = 9 - y^2$; $z = 2 : x = 6 - y^2$, $y = 0 : x = 10 - z^2$, $x = 0 : z^2 + y^2 = 10$.

9 (a) B(III)

(b) C(II)

(c) F(V)

(d) A(VI)

(e) D(IV)

(f) E(I)

10 $f(-3, 3) \approx 55$; $f(3, -2) \approx 35$