

Lista 3 - Funções de Várias Variáveis

Diferenciabilidade

1 — Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ para as seguintes funções:

(a) $f(x, y) = x \cos(x) \cos(y)$

(b) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

(c) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

(d) $f(x, y) = x^y$

(e) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 3}$

(f) $f(x, y) = \frac{x \sin(y)}{\cos(x^2 + y^2)}$

2 — Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, e $\frac{\partial f}{\partial z}$ para as seguintes funções:

(a) $f(x, y, z) = x^2y - 3xy^2 + 2yz$

(b) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$

(c) $f(x, y, z) = ye^x \sin(xz)$

3 — Encontre as derivadas parciais indicadas.

(a) $z = \ln \sqrt{1 + xy}$; $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 0)$

(b) $z = e^{ax} \cos(bx + y)$; $z_y(2\pi/b, 0)$

4 — Seja $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$. Mostre que

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{4x}{3(x^2 + y^2)^{1/3}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5 — Verifique se as funções abaixo são diferenciáveis em $(0, 0)$

(a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(b) $f(x, y) = x^{1/3} \cos(y)$

(c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

6 — Encontre o ponto onde o plano tangente à superfície de equação $z = e^{x-y}$ no ponto $(1, 1, 1)$ corta o eixo z .

7 — Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ em $(2, 1)$, e use-a para aproximar $f(1.95, 1.08)$.

8 — Encontre uma aproximação linear para:

(a) $(0.99e^{0.02})^8$

(b) $(0.99)^3 + (2.01)^3 - 6(0.99)(2.01)$

(c) $\sqrt{(4.01)^2 + (3.98)^2 + (2.02)^2}$

9 — Sejam $z = ye^x + xe^y$, $x(t) = \cos(t)$, e $y = \sin(t)$. Determine $\frac{dz}{dt}$ de dois modos:

(a) usando a regra da cadeia

(b) determinando a função composta $z(t)$ e derivando em relação a t

10 — Suponha que $z = f(x, y)$ seja diferenciável no ponto $(4, 8)$ com $f_x(4, 8) = 3$ e $f_y(4, 8) = -1$. Se $x = t^2$ e $y = t^3$, encontre $\frac{dz}{dt}$ para $t = 2$.

11 — Sejam $\varphi(x, y) = x^2y - xy^3 + 2$; $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Encontre $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$

12 — Sejam $f(x, y) = x^2y^2 - x + 2y$; $x = \sqrt{u}$, $y = uv^3$. Encontre

$$\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u=1, v=-2} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{u=1, v=-2}$$

13 — Seja f uma função diferenciável de uma variável e seja $z = f(x^2 + y^2)$. Mostre que $yz_x - xz_y = 0$.

14 — Seja f uma função de uma variável e seja $w = f(u)$, em que $u = x + 2y + 3z$. Mostre que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 6 \frac{dw}{du}$$

15 — Seja $f(x - y, y - x)$. Mostre que $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

16 — Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\phi'(1) = 4$. Seja $g(x, y) = \phi(\frac{x}{y})$. Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$.

17 — Determine uma função $f(x, y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 6y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \frac{y}{y^2+1}$.

18 — A função $y = f(x)$ é definida implicitamente

pela equação $F(x, y) = 0$ se para todo $x \in D_f$ temos $F(x, f(x)) = 0$. Mostre que se f e F são diferenciáveis, então:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} \text{ se } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$$

19 — Seja $z = f(x, y)$ definida implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$ para todo $(x, y) \in D_f$. Mostre que se f e F são diferenciáveis, então:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} \text{ se } \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

20 — Use o exercício anterior para determinar a equação do plano tangente no ponto $(1, 3, 2)$ à superfície da equação

$$z^3 + (x + y)z^2 + x^2 + y^2 = 13$$

Respostas dos Exercícios

1 (a)

$$f_x = \cos x \cos y - x \sin x \cos y$$

$$f_y = -x \cos x \sin y$$

(b)

$$f_x = 2x[1 + \ln(x^2 + y^2)]$$

$$f_y = 2y[1 + \ln(x^2 + y^2)]$$

(c)

$$f_x = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$f_y = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

(d)

$$f_x = yx^{y-1}$$

$$f_y = x^y \ln x$$

(e)

$$f_x = x^2(x^3 + y^3 + 3)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f_y = y^2(x^3 + y^3 + 3)^{-\frac{2}{3}}$$

(f)

$$f_x = \frac{\sin y \cos(x^2 + y^2) + 2x^2 \sin y \sin(x^2 + y^2)}{\cos^2(x^2 + y^2)}$$

$$f_y = \frac{x \cos y \cos(x^2 + y^2) + 2yx \sin y \sin(x^2 + y^2)}{\cos^2(x^2 + y^2)}$$

2 (a)

$$f_x = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}}$$

$$f_y = \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}}$$

$$f_z = \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}}$$

(b)

$$f_x = y \exp x \sin(xz) + yz \exp x \cos(xz)$$

$$f_y = \exp x \sin(xz)$$

$$f_z = xy \exp x \cos(xz)$$

3 (a)

$$z_x(1, 2) = \frac{2\sqrt{3}}{3}, z_y(0, 0) = 0$$

(b)

$$z_y\left(\frac{2\pi}{b}, 0\right) = 0$$

4

5 (a) Não é diferenciável

(b) Não é diferenciável

(c) Diferenciável

(d) Não é diferenciável

6

$$P = (0, 0, 1)$$

7 A aproximação linear é $T(x, y) = 3 - \frac{2}{3}(x-2) - \frac{7}{3}(y-1)$.
Então $f(1.95, 1.08) \approx T(1.95, 1.08) = 2.85$.

8 (a) $\approx 1,08$

(b) $\approx -2,85$

(c) ≈ 6

9

$$\frac{dz}{dt} = (\cos t - \sin^2 t)e^{\cos t} + (\cos^2 t - \sin t)e^{\sin t}$$

10 0

11

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 3r^2 \cos^2 \theta \sin \theta - 4r^3 \cos \theta \sin^3 \theta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = r^3(r \sin^4 \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta + \cos^3 \theta - 3r \cos^2 \theta \sin^2 \theta)$$

12

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=1, v=-2} = \frac{351}{2}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{u=1, v=-2} = -168$$

13

14

15

16

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 4, \frac{\partial g}{\partial y} = -4$$

17 $f(x, y) = x^3 y^2 - 6xy + \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) + k$

18

19

20 $T(x, y) = 2 - \frac{3}{14}(x-1) - \frac{5}{14}(y-3)$