UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 6

Integrais duplas e aplicações

1 — Calcule $\int\int_R f(x,y)\,dxdy$, onde:

(a)$f(x,y) = xe^{xy}$ e R é o retângulo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \le x \le 3 , 0 \le y \le 1\}$;

(b)$f(x,y) = \frac{1}{x+y}$ e R é o retângulo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \le x \le 2 , 1 \le y \le 2\}$.

2 — Esboçe a região de integração e calcule as integrais iteradas seguintes:

(a)$\int_0^1 \int_x^{2x} (2x+4y)dydx$;

(b)$\int_1^e \int_0^{\ln x} (\frac{1}{e-e^y})dydx$;

(c)$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xdxdy$;

(d)$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2xydydx$.

3 — Inverta a ordem de integração das seguintes integrais duplas iteradas:

(a)$\int_0^4 \int_0^{y/2} f(x,y)dxdy$;

(b)$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$;

(c)$\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)dydx$.

4 — Calcule $\iint_R (8-x-y)\,dxdy$, onde R é a região delimitada por $y = x^2$ e $y = 4$.

5 — Calcule $\iint_R sen(x)sen(y)\,dxdy$, onde R é o quadrado $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le \frac{\pi}{2} , 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$.

6 — Calcule $\iint_R \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, onde R é a região delimitada por $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ e $x = 2$.

7 — Determine o Jacobiano de transformação:

(a)$x = u^2 - v^2$, $y = u^2 + v^2$;

(b)$x = \frac{u}{u+v}$, $x = \frac{v}{u-v}$;

(c)$x = \alpha sin\beta$, $y = \alpha cos\beta$

8 — Determine a imagem do conjunto S pela transformação dada:

(a)S $= \{(u,v); 0 \le u \le 3, 0 \le v \le 2\}$, $x = 2u + 3v$, $y = u - v$;

(b)S é a região triangular com vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$, $x = u^2$, $y = v$;

(c)S é o disco dado por $u^2 + v^2 \le 1$, $x = au$, $y = bv$

9 — Usando coordenadas polares, calcule:

(a)$\iint_R (x^2+y^2)^2\,dxdy$, onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \le 4 , x \ge 0\}$;

(b) $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dydx$;

(c)$\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, onde R é a região delimitada por $x^2+y^2 = 1$ e $x^2+y^2 = 9$;

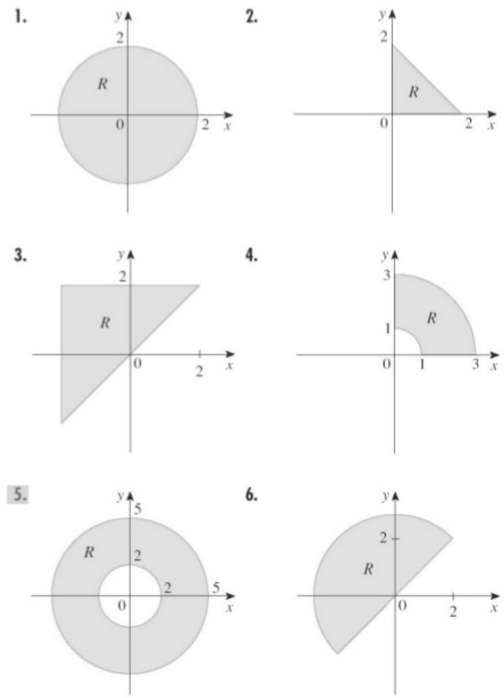
(d)$\iint_R x\,dxdy$, onde R é a região delimitada por $x^2 + y^2 - 4x = 0$;

(e)$\iint_R xy\,dxdy$, onde R é a região delimitada por $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;

(f)$\iint_R \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\,dxdy$, onde R é a região delimitada por $(x-1)^2+(y-2)^2 = 1$;

(g)$\iint_R dxdy$, onde R é a região limitada por $4(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$. Interprete o resultado geometricamente.

10 — Uma região R é mostrada em cada um dos gráficos da figura abaixo. Decida se você deve usar coordenadas polares ou retangulares e escreva os limites de integração da integral iterada $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$, onde f é uma função arbitrária qualquer contínua em $\mathbb{R}$.[1]



11 — Calcule o volume dos sólidos delimitados pelas superfícies dadas:

(a)$x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ e $z = x^2 + y^2$.

(b)$z = 0$, $x^2 + y^2 = 16$ e $z = 10 + x$.

12 — Calcule a área da elipse $x^2 + 4y^2 - 4x = 0$.

13 — Determine a área de região R delimitada pelas curvas $y = x^3$, $x + y = 2$ e $y = 0$.

14 — Calcule $\iint\limits_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dxdy$, onde R é a região triangular limitada pela reta $x+y = 2$ e os eixos coordenados.

15 — Utilize a transformação dada para calcular a integral:

(a)

$$\iint\limits_R (x - 3y)dA,$$

onde R é a região triangular de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$ e $(1, 2)$, $x = 2u + v$, $y = u + 2v$;

(b)

$$\iint\limits_R x^2 dA,$$

onde R é a região limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$, $x = 2u$, $y = 3v$;

(c)

$$\iint\limits_R xy dA,$$

onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e pelas hipérboles $xy = 1$ e $xy = 3$, $x = u/v$, $y = v$

16 — Calcule a integral fazendo uma mudança de variáveis apropriada:

(a)

$$\iint\limits_R \frac{x - 2y}{3x - y} dA,$$

onde R é o paralelogramo delimitado pelas retas $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$, $3x - y = 1$, e $3x - y = 8$;

(b)

$$\iint\limits_R \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dA,$$

onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0), (2, 0) (0, 2)$ e $(0, 1)$;

(c)

$$\iint\limits_R e^{x+y} dA,$$

onde R é dada pela inequação $|x| + |y| \leq 1$.

17 — A área de uma superfície determinada pelo gráfico de uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ definida numa região $R \subset \mathbb{R}^2$ é dada pela fórmula

$$A = \iint\limits_R \sqrt{1 + \|\nabla f(x,y)\|^2} dS\,.$$

[1]Fonte da figura: Cálculo, Stewart, 5a. Edição, vol.2, pág.1006, Cengage Learning, 2006.

Se f é dada implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$, então

$$A = \iint_R \frac{\|\nabla F(x, y, z)\|}{\left|\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right|} dS\,,$$

onde $z = f(x, y)$ e $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} \neq 0$ no interior de R. Determine a área da superfície:

(a) A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante .

(b) A parte da superficie $z = xy$ que está dentro do cilinfor $x^2 + y^2 = 1$.

(c) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do parabolóide $z = x^2 + y^2$.

(d) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilinfro $x^2 + y^2 = ax$ e acima do plano xy.

18 — Prove que:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n dxdy = 0.$$

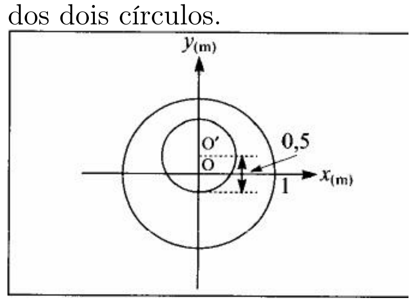
19 — Calcule a integral dupla

$$I(a) = \iint_R \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy,$$

onde $R = \{(x, y) \in R^2 | \, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{a^2}\}$ e mostre que

$$\lim_{a \to \infty} I(a) = 0.$$

20 — Calcule as coordenadas do Centro de Massa da placa homogênea indicada na figura, um círculo de $1,0m$ de raio do qual foi removido um círculo de $0,5m$ de raio, com uma separação de $0,25m$ entre os centros O e O' dos dois círculos.



Respostas dos Exercícios

1 (a) $e^3 - e - 2$.

(b) $10\ln 2 - 6\ln 3$.

2 (a) $8/3$.

(b) 1.

(c) $1/3$.

(d) $1/6$.

3 (a) $\int_0^2 \int_{2x}^4 f(x,y)dxdy$

(b) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dxdy$

(c) $\int_0^2 \int_{y/3}^{y/2} f(x,y)dxdy + \int_2^3 \int_{y/3}^1 f(x,y)dxdy$

4 $896/15$

5 1

6 $9/4$

7 (a) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 8uv$

(b) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{2uv}{(u+v)^2(u-v)^2}$

(c) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)} = -\alpha$

8 (a) A imagem de S é o quadrilátero cujas bordas são dadas pelas curvas $y = -x/3$, $y = 5 - x/3$, $y = x/2$, $y = -5 + x/2$.

(b) A imagem de S é a região delimitada pelas curvas $x = 0$, $y = 1$ e $y = \sqrt{x}$.

(c) A imagem de S é a região delimitada pela elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

9 (a) $\frac{32\pi}{3}$

(b) $\frac{2\pi}{3}$

(c) $\frac{52\pi}{3}$

(d) 8π

(e) 0

(f) $\frac{2\pi}{3}$

(g) 2π

10 (1) $\int_0^2 \int_0^{2\pi} rf(x(r,\theta), y(r,\theta))d\theta dr$

(2) $\int_0^2 \int_0^{-x+2} f(x,y)dxdy$

(3) $\int_{-2}^2 \int_x^2 f(x,y)dxdy$

(4) $\int_1^3 \int_0^{\pi/2} rf(x(r,\theta), y(r,\theta))d\theta dr$

(5) $\int_2^5 \int_0^{2\pi} rf(x(r,\theta), y(r,\theta))d\theta dr$

(6) $\int_0^{2\sqrt{2}} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} rf(x(r,\theta), y(r,\theta))d\theta dr$

11 (a) $\frac{\pi}{2}$

(b) 160π

12 2π

13 $\frac{3}{4}$

14 $e - e^{-1}$

15 (a) -3

(b) 6π

(c) $2\ln 3$

16 (a) $\frac{6}{5}\ln 2$

(b) $\frac{3}{2}\sin 1$

(c) $e - \frac{1}{e}$

17 (a) $3\sqrt{14}$

(b) $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

(c) 4π

(d) $a^2(\pi - 2)$

18

19 $I(a) = 2\pi \arctan(1/a)$

20 $(x_c, y_c) = (0, -\frac{1}{12})$