

Lista 7

Integrais triplas e aplicações

1 — Calcule as seguintes integrais triplas iteradas:

$$(a) \int_0^1 \int_0^{x+z} \int_0^z 6xy \, dy \, dx \, dz$$

$$(b) \int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2} \, dx \, dy \, dz$$

(c) $\iiint_R y \, dV$ onde R é a região limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x + 2y + z = 4$;

(d) $\iiint_R y \, dV$ onde R é a região limitada pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 3x$ e $z = 0$ no primeiro octante.

2 — Esboce o sólido cujo volume é dado pelas integrais triplas iteradas e reescreva a integral como uma integral equivalente de dois modos diferentes:

$$(a) \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy \, dz \, dx$$

$$(b) \int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx \, dz \, dy$$

$$(c) \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} dy \, dz \, dx$$

3 — Faça um esboço do sólido cujo volume é dado pela integral e calcule tal integral:

$$(a) \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{9-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$(b) \int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

4 — Determine o Jacobiano de transformação:

$$x = e^{u-v}, \quad y = e^{u+v}, \quad z = e^{u+v+w}$$

5 — Utilize coordenadas cilíndricas e calcule as integrais:

$$(a) \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)^{3/2} \, dz \, dy \, dx.$$

(b) $\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dV$ onde R é a região contida dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$;

(c) $\iiint_R x \, dV$ onde R está delimitada pelos planos $z = 0$ e $z = x + y + 3$ e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

6 — Utilize coordenadas esféricas e calcule as integrais:

$$(a) \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_0^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dx \, dy.$$

(b) $\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dV$ onde R é a região hemisférica que está acima do plano xy e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(c) $\iiint_R e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, dV$ onde R está delimitada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no primeiro octante.

Respostas dos Exercícios

1 (a) $17/20$

(b) $1/4e$

(c) $4/3$

(d) $27\pi/16$

2 (a) $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{2-2z} dy dx dz = \int_0^2 \int_0^{\frac{2-y}{2}} \int_0^{1-z} dx dz dy$

(b) $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-x}} \int_0^{2-y} dz dy dx = \int_0^2 \int_0^{2-z} \int_0^{4-y^2} dx dy dz$

(c) $\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x^2} dz dx dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \int_0^{1-x} dy dx dz$

3 (a) 7π

(b) $\frac{9\pi}{4}(2 - \sqrt{3})$

4 $2e^{2u}e^{u+v+w}$

5 (a) $8\pi/35$

(b) 384π

(c) $\frac{65}{4}\pi$

6 (a) $\frac{486\pi}{5}(\sqrt{2} - 1)$

(b) $\pi^2/8$

(c) $\frac{\pi}{2}(5e^3 - 2)$