UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 4 - Funções de Várias Variáveis

Gradiente, Derivada Direcional, e Derivadas Parciais de Ordem Superior

1 — Esboce a curva de nível de $f(x,y)$ que passa pelo ponto P e desenhe o vetor gradiente de f em P:

(a)
$$f(x,y) = \frac{x}{y^2},\ P = (-2,2)$$

(b)
$$f(x,y) = x^2 + 4y^2,\ P = (-2,0)$$

(c)
$$f(x,y) = x^2 - y^2,\ P = (2,-1)$$

2 — Considere a superfície $xz - yz^3 + yz^2 = 2$

(a) Determine a equação do plano tangente à superficie no ponto $(2,-1,1)$.

(b) determine as equações parametricas da reta que é normal à superficie no ponto $(2,-1,1)$

3 — Determine a derivada direcional de f em P na direção do vetor u:

(a)
$$f(x,y) = sen(x)cos(y),\ P = (\pi/3, -2\pi/3); u = (2,3)$$

(b)
$$f(x,y,z) = \sqrt{xyz},\ P = (2,-1,-2); u = (1,2,-2)$$

4 — O objetivo desse exercício é demonstrar a desigualdade de Cauchy-Schwarz: dados dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\| \ ,$$

com igualdade se e somente se u e v forem colineares (i.e.,proporcionais). (lembrar que se $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ e $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$, então o produto interno canônico $\langle u, v\rangle$ de u e v e a norma $\|u\|$ de u são respectivamente dados por $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$ e $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$)

(a) Mostre que $\|u + tv\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle t + \|v\|^2 t^2$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$;

(b) Mostre que se $v \neq 0$, o polinômio de segundo grau $p(t)$ dado no item (a) possui no máximo uma raiz real, e que isso ocorre se e somente se u e v forem colineares.

(c) Conclua do item (b) a desigualdade de Cauchy-Schwarz no caso $v \neq 0$. Por que ela permanece válida se $v = 0$? Justifique.

(d) Dado $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, seja $f : D \to \mathbb{R}$ diferenciável em $x_0 \in D$. Mostre que a direção ao longo da qual a derivada direcional de f em x_0 é máxima é ao longo de $\nabla f(x_0)$.

5 — Determine a derivada direcional máxima de f em P e a direção em que isto ocorre:

(a)
$$f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 4z^2,\ P = (1,5,-2)$$

(b)
$$f(x,y,z) = \sqrt{xy^2z^3},\ P = (2,2,2)$$

6 — Suponha que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,2) = -5$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,2) = 10$, onde $u = \left(\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}\right)$ e $v = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$. Determine:

(a) $f_x(1,2)$

(b) $f_y(1,2)$

(c) a derivada direcional de f em $(1,2)$ na direção e sentido da origem.

7 — Determine f_{xx} , f_{xy}, f_{yx} e f_{yy} para cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2$

(b) $f(x,y) = sen(x^2 - 3xy)$

(c) $f(x,y) = x^2y^2e^{2xy}$

8 — Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2) & ,\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a)Se $f(x,y) \neq (0,0)$ calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(b)Mostre que $(\partial f/\partial x)(0,0) = 0 = (\partial f/\partial y)(0,0)$.

(c)$(\partial^2 f/\partial x\partial y)(0,0) = 1$ e $(\partial^2 f/\partial y\partial x)(0,0) = -1$

(d)O que aconteceu ? Porque as derivadas mistas não são iguais ?

9 — Dados $z = f(x,y) = 3xy - 4y^2, x = 2se^r, y = re^{-s}$.Determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial r}$ de duas maneiras:

(a)expressando z em termos de r e s;

(b)usando a regra da cadeia

10 — Uma função $w = f(x,y)$ com segundas derivadas parciais contínuas que satisfaz a *Equação de Laplace*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

é chamada *harmônica.* Analogamente, uma função $w = f(x,y,z)$ com segundas derivadas parciais contínuas que satisfaz a *Equação de Laplace*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0,$$

é chamada *harmônica.* Quais das funções abaixo são harmônicas?

(a)$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

(b)$f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y) + e^y \cos(y)$

(c)$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

11 — Determine o maior conjunto aberto no qual $f_{xy} = f_{yx}$ para

(a)$f(x,y) = 4x^3y + 3x^2y$

(b)$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$

(c)$f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y^2)$

12 — Se o *potencial elétrico* em um ponto (x,y) do plano *xy* é $V(x,y)$ então o *vetor campo elétrico* no ponto (x,y) é $\mathbf{E} = -\nabla V$. Suponha que $V(x,y) = e^{-2x}\cos(2y)$.

(a)Determine o valor do campo elétrico em $(\pi/4, 0)$.

(b)Mostre que, em cada ponto no plano, o potencial elétrico decresce mais rapidamente na direção e sentido do vetor **E**.

13 — A equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde c é uma constante positiva, é chamada *equação de onda.* Sejam f e g funções difernciáveis de uma variável.

(a)Mostre que $u(x,y) = f(x+ct)$ e $v(x,t) = g(x-ct)$ satisfazem a equação da onda.

(b)Mostre que uma função da forma $\phi(x,y) = f(x+ct) + g(x-ct)$ satisfaz a equação da onda.

(c)Confirme que $\phi(x,t) = \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(x)$ satisfaz a equação da onda com $c = 1$, e então use identidades trigonométricas apropriadas para expressar essa função na forma $f(x+t) + g(x-t)$.

14 — O capitão Astro está outra vez em perigo perto da órbita de Mercúrio. Ele está na posição $P_0 = (1,1,1)$, e a temperatura da blindagem de sua espaçonave num ponto (x,y,z) é dada por

$$T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2} \text{graus}.$$

(a)Que direção ele deve tomar para perder temperatura o mais rápido possível?

(b)Se a espaçonave viaja a e^8 unidades de comprimento por segundo, com que taxa a temperatura irá cair quando ele seguir a direção do item (a)?

(c)Infelizmente, a blindagem da espaçonave se danificará se a taxa de variação da temperatura for inferior a $\sqrt{14}e^2$ graus/s. Que conjunto de possíveis direções ele pode tomar sem causar danos à sua espaçonave, a partir de P_0, com velocidade do item (b)

15 — Se u e v são funções de x e y, de classe C^2, e satisfazem as equações de *Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

mostre que u e v são harmônicas.

Respostas dos Exercícios

1 (a)
$$\nabla f(-2,2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$$

(b)
$$\nabla f(-2,0) = (-4,0)$$

(c)
$$\nabla f(2,-1) = (4,2)$$

2 (a) $z(-z^2 + z + 2yz^2 - 4yz + 2y - 2) + x = 0$

(b) $x = 2 + t; y = -1; z = 1 + 3t$

3 (a) $D_u f = \frac{7}{4\sqrt{13}}$

(b) $D_u f = \frac{-1}{6}$

4 (a) Use as propriedades $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ e $\langle u + tv, w\rangle = \langle u, w\rangle + t\,\langle v, w\rangle$ do produto interno.

(b)

(c) Calcule o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ de $p(t) = at^2 + bt + c$ quando $v \neq 0$, e os dois lados da desigualdade de Cauchy-Schwarz quando $v = 0$.

(d) Utilize $D_u f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), u\rangle$.

5 (a) $D_u f = \sqrt{392}$ ocorre na direção de ∇f .

(b) $D_u f = \sqrt{56}$ ocorre na direção de ∇f .

6 (a) $f_x(1,2) = 5$

(b) $f_y(1,2) = -10$

(c) $u = (-1,-2)$, $D_u f(1,2) = 3\sqrt{5}$

7 (a) $f_{xx} = 6$; $f_{xy} = f_{yx} = 0$; $f_{yy} = 4$

(b) $f_{xx} = 2\cos(x^2 - 3xy) - (4x^2 - 12xy + 9y^2)\mathrm{sen}(x^2 - 3xy)$; $f_{xy} = f_{yx} = -3\cos(x^2 - 3xy) + (6x^2 - 9xy)\mathrm{sen}(x^2 - 3xy)$; $f_{yy} = -9x^2\mathrm{sen}(x^2 - 3xy)$;

(c) $f_{xx} = e^{2xy}(2y^2 + 8xy^3 + 4x^2y^4)$; $f_{xy} = f_{yx} = e^{2xy}(4xy + 10x^2y^2 + 4x^3y^3)$; $f_{xy} = e^{2xy}(2x^2 + 8x^3y + 4y^2x^4)$;

8

9
$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = (2 + r)\,6se^{r-s} - 8e^{-2s}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial r} = (1 - s + r - rs)\,6e^{r-s} + 16re^{-2s}$$

10 (a) sim

(b) não

(c) sim, em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$

11 (a) $\mathbb{R}^2$

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 > 1\}$

(c) $\mathbb{R}^2$

12 (a) $\mathbf{E}(\pi/4, 0) = (2e^{-\pi/2}, 0)$

(b) Segue diretamente da definição do campo elétrico.

13

14 (a) a direção e sentido de $-\nabla T(1,1,1) = (2e^{-6}, 4e^{-6}, 6e^{-6})$, o qual tem a mesma direção e sentido do vetor $(1,2,3)$

(b) a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo é dada pelo produto de $|-\nabla T(1,1,1)|$ pela velocidade, isto é, $2\sqrt{14}e^2$

(c) Não existem, pois a direção de maior decrescimento é dada pela direção obtida no item (a).

15